Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (4+4=8P) Es seien (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie

a) f ist genau dann stetig, wenn für alle Teilmengen $A \subseteq X$ gilt: $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

b) Wenn f stetig ist, so gilt $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ für alle Teilmengen $B \subseteq Y$. Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass man hierbei "$\subseteq$" i.A. nicht durch "$=$" ersetzen kann.

Aufgabe 2 (5+7=12P) Es sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion derart, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}^n - K$. Zeigen Sie:

a) f nimmt auf $\mathbb{R}^n$ ein globales Minimum oder ein globales Maximum an.

b) f ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3 (6+6=12P)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ und die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_1(0) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\big\}$ die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre bzgl. $\|\cdot\|_2$. Zeigen Sie, dass es für eine stetige Funktion $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stets einen Punkt $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ gibt, sodass $f(x_0) = f(-x_0)$. (*Hinweis:* Zwischenwertsatz).

b) Zeigen Sie, dass das Intervall $[0, \infty)$ und $\mathbb{R}$ (mit der von $|\cdot|$ induzierten Metrik) *nicht homöomorph* sind.

Aufgabe 4 (8P) Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x,y) := \begin{cases} |y/x^2| \cdot e^{-|y/x^2|}, & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist, dass jedoch die Einschränkung $f_{|G}$ auf jede Ursprungsgerade $G \subset \mathbb{R}^2$ stetig ist.

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 8. Juni** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.