Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (12P) Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass f stetig ist in folgenden drei Schritten:

(i) Der Induktionsanfang $n = 1$ wurde in “Analysis 1” gezeigt und darf als bekannt vorausgesetzt werden.

(ii) Sei $x_0 \in G$ ein beliebiger Punkt; ohne Einschränkung dürfen wir $x_0 = 0$ annehmen (warum?). Wähle $\delta > 0$ klein genug, dass der Würfel

$$W := \overbrace{[-\delta, \delta] \times \cdots \times [-\delta, \delta]}^{n\text{-mal}}$$

in G enthalten ist (wieso geht das?). Dann ist f nach Induktionsvoraussetzung auf allen $(n-1)$-dimensionalen “Seitenflächen“ des Würfels beschränkt (begründen Sie dies!). Wir bezeichnen das Maximum dieser Schranken mit M.

(iii) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset W$ eine Folge die gegen $0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert und $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0, 1]$ eine Folge positiver reeller Zahlen, sodass $x_k \in \partial(W_k)$, wobei

$$W_k := \overbrace{[-\delta_k, \delta_k] \times \cdots \times [-\delta_k, \delta_k]}^{n\text{-mal}}.$$

Dann gilt (zeigen Sie dies!):

$$|f(0) - f(x_k)| \leq \frac{\delta_k}{\delta} \cdot |M - f(0)|,$$

und somit (warum?) $|f(0) - f(x_k)| \to 0$ wenn $k \to \infty$.

(*Hinweis:* Schreiben Sie 0 und x_k als geeignete konvexe Kombination mit einem Vektor aus ∂W!)

Aufgabe 2 (7P)

Konvexe Funktionen auf normierten Räumen, die nicht endlich erzeugt sind, sind im Allgemeinen nicht stetig: Betrachten Sie den Raum $X := \left(C^1([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ der auf dem Intervall $[0, 1]$ einmal stetig-differenzierbaren reellwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm und die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$, die durch $f(\varphi) = \varphi'(1)$ für alle $\varphi \in X$ definiert ist. Zeigen Sie, dass f zwar konvex, aber nicht stetig ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4+8=12P) Es sei $\big(X, \|\cdot\|\big)$ ein normierter Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $a \in A$ gibt, sodass für jeden Punkt $x \in A$ die Verbindungsstrecke

$$[x, a] := \big\{ta + (1-t)x \,:\, t \in [0,1]\big\}$$

zwischen x und a in A enthalten ist.

a) Zeigen Sie, dass jede sternförmige Menge wegzusammenhängend ist.

b) Es seien $x, y \in X$ und $\varepsilon, \delta \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$B_\varepsilon(x) \cup B_\delta(y)$$

genau dann sternförmig ist, wenn $\|x - y\| < \varepsilon + \delta$.

Aufgabe 4 (3×3=9P) Prüfen Sie die folgenden Teilmengen von reellen Vektorräumen auf Konvexität:

a) $A := \big\{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1 \,:\, x_k = 0 \text{ für alle geraden } k \in \mathbb{N}\big\}$, ℓ^1 wie in Aufgabe 1 von Blatt 6;

b) $B := \big\{f \in \big(C^1([0,1]), \mathbb{R}\big) \,:\, f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in [0,1]\big\}$, $\big(C^1([0,1]), \mathbb{R}\big)$ wie in Aufgabe 2;

c) $C := \big\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,:\, p(x) = 0 \text{ hat genau eine Lösung in } \mathbb{R}\big\}$, $\mathbb{R}[x]$ wie in Aufgabe 4 von Blatt 4.

Abgabe: Bis **Freitag, den 16. Juni** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.