Universität des Saarlandes
Fachrichtung – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 2 (SoSe 2017)
9. Übungsblatt

Aufgabe 1 (3+4+3=10P) Seien

$$\alpha : [0,a] \to \mathbb{R}^3,\ \alpha(t) = \big(r\cos t, r\sin t, ct\big), \quad (a,r,c>0),$$
$$\beta : [0,a] \to \mathbb{R}^2,\ \beta(t) = \big(e^{ct}\cos t, e^{ct}\sin t\big), \quad (a,r,c>0),$$
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = \begin{cases} \big(t, \sin\frac{1}{t}\big), & \text{wenn } t \neq 0,\\ (0,0), & \text{wenn } t = 0. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Kurven α, β, γ jeweils in einem geeigneten Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurven α und β.

c) Zeigen Sie, dass die Kurve γ nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 2 (4+4=8P) Parametrisieren Sie die folgenden Kurven nach der Bogenlänge:

a) $\delta(t) := e^{-t}\big(\cos(t), \sin(t), 1\big), \quad t \in (1,\infty).$

b) $\varepsilon(t) := \big(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\big), \quad t \in [0,\infty).$ (*Hinweis*: $\cosh(2t) = 2\cosh^2(t) - 1$.)

Aufgabe 3 (6+6=12P)

Seien $a, b \in [0,\infty)$ und $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$. Betrachten Sie die durch

$$\gamma(s) := \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right) \quad (s \in \mathbb{R}).$$

erklärte parametrisierte Kurve.

(a) Bestimmen Sie das Frenetsche Dreibein der Kurve und berechnen Sie die Krümmung und Torsion von γ.

(b) Sei $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Zeigen Sie: Ist die Torsion τ von α auf $[0,1]$ identisch null, so liegt die Spur von α in einer Ebene. (*Hinweis*: Betrachten Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\alpha(s)\cdot b(s)) = \dot\alpha(s)\cdot b(s) + \alpha(s)\cdot \dot b(s)$.)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5+5=10P) Seien $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ eine regulär parametrisierte Kurve und $A = \alpha(0)$, $B = \beta(1)$ mit $A \neq B$. Zeigen Sie:

a) Für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(B - A) \cdot e \leq L,$$

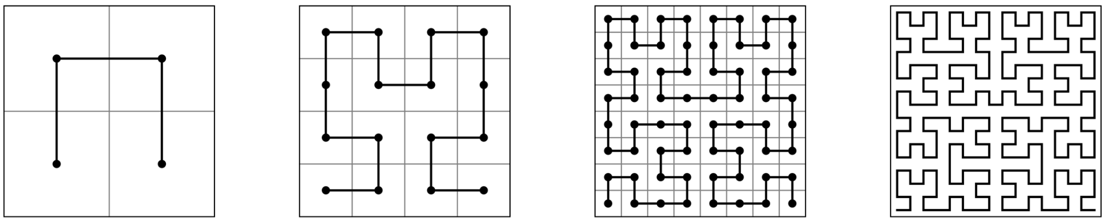
wobei L die Länge des Bogens von A nach B sei.

b) Der kürzeste Weg von A nach B ist die Strecke, welche diese beiden Punkte verbindet.

Zusatzaufgabe* (10P) Konstruieren Sie eine Kurve $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, deren Spur das Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ ist:

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nach folgendem Muster rekursiv eine Kurve $\alpha_n : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$:

- Zerlege das Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ in 4^n gleichgroße Teilquadrate.
- Die Spur von α_n verbindet die Mittelpunkte der Teilquadrate nach folgendem Muster:



- α_n konvergiert für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Funktion $\alpha : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$.

Zeigen Sie, dass α stetig ist und $[0,1]$ surjektiv auf das Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ abbildet.

(**Freiwillig!*)

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 22. Juni** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.