22

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung *der Ordnung* $k \geq 1$ hat die Form

$$(*) \qquad F\Big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x)\Big) = 0$$

mit **gegebener** Funktion $F : I \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, hierbei bezeichnet $I \subset \mathbb{R}$ ein **offenes** Intervall.
Es handelt sich also um eine Relation zwischen $x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x)$ auf I.
gesucht : eine k-mal diff'bare Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $(*)$ gilt für alle $x \in I$.

Beispiele :

(i) $y(x) = e^x$ erfüllt $y'(x) = y(x)$, d.h. mit $F(x, \alpha, \beta) := \beta - \alpha$ gilt: $F\Big(x, y(x), y'(x)\Big) = 0$.

(ii) Die Funktion $y(x) = \sin x$, bzw. $y(x) = \cos x$ erfüllen $y''(x) = -y(x)$ auf $\mathbb{R}$
hier: $F(x, u, v, w) := w + u \Longrightarrow F\Big(x, y(x), y'(x), y''(x)\Big) = 0$.

In diesen Beispielen hängt F **nicht von x ab** $\longrightarrow$ **autonome Differentialgleichung**.

Bemerkungen :

1) Sind $F = (F^1, \ldots, F^m)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$ vektorwertig, so heißt $(*)$
ein System gewöhnlicher Differentialgleichung der Ordnung k.

Beispiel :

$y(x) := (\sin x, \cos x)$ löst das Gleichungssystem $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -y_1(x) \end{cases}$

Wie sieht F hier aus ?

2) Was bedeutet gewöhnliche Differentialgleichung ?

   $y = y(x)$ *h ängt nur von einer reellen* Variablen ab, im Unterschied dazu : *partielle Differentialgleichungen* sind Relationen, die zwischen einer Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$ und ihren partiellen Ableitungen bestehen, z.B. :

   $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ oder $\frac{\partial}{\partial t} v - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = 0$ für $v = v(t, x_1, \dots, x_n)$

   Theorie dazu ist viel komplizierter $\longrightarrow$ Hauptstudium !

3) gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben :

   - Bewegungsgleichungen in der Physik
   - Reaktionsvorgänge in der Chemie
   - Evolutionsmodelle in der Biologie
     $y(t) =$ Anzahl der Mitglieder in einer Population zur Zeit t;
     $y'(t) =$ Änderungsrate
     Literatur : Braun, Differential Equations and their Applications, Springer

4) kann man $(*)$ nach der höchsten Ableitung auflösen, also die Form

   $(**) \quad y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x)), \; x \in I$, erreichen,

   so spricht man von einer **expliziten Differentialgleichung k$^{\text{ter}}$ Ordnung**

Explizite Gleichungen und Systeme 1$^{\text{ter}}$ Ordnung

betrachte $y'(x) = f(x, y(x)), \; x \in I$ (f gegeben)

uninteressanter Fall :

f hängt von y ab, d.h.

$y'(x) = f(x), \; x \in I \overset{\text{Hauptsatz}}{\Longrightarrow} y(x) = c + \int\limits_{x_\circ}^{x} f(t)\,dt$, falls f stetig.

Hier gilt : $c \in \mathbb{R}, \; x_\circ \in I$ beliebig.

<u>Man sieht direkt</u> :

Ist $x_\circ \in I$ gegeben und sucht man eine Lösung y, die zur Zeit $x_\circ$ den Wert η annimmt, so gibt es **nur genau eine** Lösung.

Allgemeines vorweg :

- Differentialgleichungen müssen **keine Lösungen** haben!

  $(y(x) - x)^2 + (y'(x))^2 = 0 \implies \begin{cases} y(x) &= x \quad \text{und} \\ y'(x) &= 0 \end{cases}$

- Differentialgleichungen können viele Lösungen haben!

  Beispiel :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt[3]{y^2},\ (x,y) \in \mathbb{R} \\ y'(x) &= f(x,y(x)) \end{aligned}$$

  Lösung :

$$\begin{aligned} & \varphi_\circ(x) &:= \ & 0 \\ \text{oder} \quad & \Psi_a(x) &:= \ & \tfrac{1}{27}(x-a)^3,\ a \in \mathbb{R}, \\ \text{oder} \quad & \Psi_{b,c}(x) &:= \ & \begin{cases} \Psi_b(x) & , x \le b \\ 0 & , b \le x \le c,\ b < c \\ \Psi_c(x) & , x \ge c \end{cases} \end{aligned}$$

  speziell :

  $\varphi_\circ, \Psi_\circ, \Psi_{b,c}$ $(b < 0 < c)$ erfüllen alle das Anfangswertproblem

  $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}$ mit $\boxed{y(0) = 0}$

  unser Ziel :

  Bedingungen an $f(x,y)$, die die Existenz von Lösungen zu $y'(x) = f(x, a(x))$ garantieren.

Definition 22.1 :

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Wir schreiben $(x,y) = (x, y_1, \ldots, y_n)$ für die Variablen von f.

i) f heißt **(partiell) Lipschitz stetig bzgl. der y-Variablen**

$$\Longleftrightarrow\ \exists\ L \ge 0 : \Big| f(x,y) - f(x,\tilde{y}) \Big| \le L \cdot |y - \tilde{y}| \quad \textit{für alle } (x,y),\ (x,\tilde{y}) \in G.$$

ii) f heißt **lokal Lipschitz bzgl.** *y (genauer : "lokal partiell"...)*

$\forall\ (x_\circ, y_\circ) \in G\ \exists$ Umgebung U von $(x_\circ, y_\circ)$ in G und $L \ge 0$ mit

$$\Big| f(x,y) - f(x,\tilde{y}) \Big| \le L \cdot |y - \tilde{y}| \textit{ für alle } (x,y),\ (x,\tilde{y}) \in U$$

Bemerkungen :

1) ii) ist offenbar Abschwächung von i)

2) $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt[3]{y^2}$ genügt in keiner Umgebung von $(a,0)$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig, einer lokalen Lipschitz Bedingung (denn $t \mapsto \sqrt[3]{t^2}$ ist nicht Lipschitz bei 0)

3) *Wie prüft man die Bedingungen?*

   Finde Schranken auf $\frac{\partial f}{\partial y_i}, i = 1, \ldots, n.$

Satz 22.1 : *(Eindeutigkeit)*

$f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, sei stetig und genüge in G einer lokalen Lipschitz Bedingung bzgl. y. Seien φ, $\Psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von $y'(x) = f(x, y(x))$ auf dem Intervall I (mit $(t, \varphi(t))$, $(t, \Psi(t)) \in G$).
Gibt es dann ein $x_\circ \in I$ mit $\varphi(x_\circ) = \Psi(x_\circ)$, so folgt $\varphi = \Psi$ auf ganz I.

Beweis :

1. Schritt :

Behauptung :

Ist $a \in I$ ein beliebiger Punkt mit $\varphi(a) = \Psi(a)$, so gibt es mindestens ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi = \Psi$ für $x \in I, |x - a| < \varepsilon$. ($\Longrightarrow$ $\varphi = \Psi$ auf Umgebung von $x_\circ \cap I$)

Beweis :

Schreibe

$$\varphi(x) - \Psi(x) = \int_a^x \Big(\varphi'(t) - \Psi'(t)\Big)\, dt = \int_a^x \Big(f(t, \varphi(t)) - f(t, \Psi(t))\Big)\, dt.$$

Zu $(a, \varphi(a)) = (a, \Psi(a)) \in G$ existiert Umgebung $U \subset G$ und $L \geq 0$ mit

$$\Big|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\Big| \leq L \cdot \Big|y - \tilde{y}\Big| \text{ für } (x, y),\ (x, \tilde{y}) \in U.$$

φ, Ψ stetig in a $\Longrightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ ($\delta > 0$ so, dass $(t, \varphi(t))$, $(t, \Psi(t)) \in U$) mit

$$\Big|f(t, \varphi(t)) - f(t, \Psi(t))\Big| \leq L \cdot \Big|\varphi(t) - \Psi(t)\Big| \text{ für alle } t \in I,\ |t - a| < \delta$$

Also :

$$\Big|\varphi(x) - \Psi(x)\Big| \leq L \cdot \Big|\int_a^x |\varphi(t) - \Psi(t)|\, dt\Big|,\ x \in I,\ |x - a| < \delta$$

O.E. gilt $L > 0$ und $L \cdot \delta \leq \frac{1}{2}$ (sonst verkleinere δ).
Sei $J := I \cap [a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}]$

$$\begin{array}{rrcll} \Longrightarrow & |\varphi(x) - \Psi(x)| & \leq & L \cdot \delta \cdot \underbrace{\max\{|\varphi(y) - \Psi(y)| : y \in J\}}_{=:M} & \text{für alle } x \in J \\ \overset{\text{bilde links max}}{\Longrightarrow} & M & \leq & L \cdot \delta \cdot M \quad \leq \frac{1}{2} M & \\ \Longrightarrow & M & = & 0, & \end{array}$$

d.h. $\varphi = \Psi$ auf J. Mit $\varepsilon = \delta/2$ folgt die Behandlung.

2. Schritt :

Behauptung :

$$\varphi(x) = \Psi(x) \quad \forall\, x \in I,\; x \geq x_\circ$$

Beweis :

$\eta_\circ := \sup\{\eta \in I :\; \varphi = \Psi \text{ auf } [x_\circ, \eta]\}$;

ist $\eta_\circ = \infty$ oder rechter Endpunkt von $I \Longrightarrow$ Behauptung,

falls nicht $\Longrightarrow \exists\, \delta > 0$ mit $[\eta_\circ, \eta_\circ + \delta] \subset I$

Def. von $\eta_\circ$, Stetigkeit von $\varphi, \Psi \;\Longrightarrow\; \varphi(\eta_\circ) = \Psi(\eta_\circ)$;

$\overset{\text{Schritt 1}}{\Longrightarrow}\; \exists\, \varepsilon > 0$ mit $\varphi = \Psi$ auf $[\eta_\circ, \eta_\circ + \varepsilon]$, Widerspruch zur Def. von $\eta_\circ$.

3. Schritt :

Behauptung :

$$\varphi(x) = \Psi(x) \quad \forall x \in I,\; x \leq x_\circ$$

Beweis :

analog zu Schritt 2

□

Beispiel :

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x,y) = xy^2$, erfüllt überall eine lokale Lipschitz Bedingung bzgl. y, ist allerdings nicht auf ganz G Lipschitz bzgl. y.

Wir zeigen jetzt : | lokale Lipschitz Stetigkeit von f bzgl. y
$\Longrightarrow$ lokale Existenz von Lösungen.

Als Hilfsmittel braucht man

Fixpunktsatz von Banach : ($\to$ Übung)

Sei (X, d) **vollständiger** metrischer Raum und die Abb. $F : A \longrightarrow A$ erfülle

$$d\Big(F(x), F(y)\Big) \leq \Theta\; d(x,y) \text{ für alle } x,\; y \in A \text{ mit } \boldsymbol{\Theta} < \mathbf{1}.$$

Ist A **abgeschlossen**, so hat F **genau einen** Fixpunkt x^*, d.h. $F(x^*) = x^*$.

Für jeden Startwerte $a \in A$ konvergiert dann die rekursiv definierte Folge

$$x_\circ = a, \quad x_{n+1} = F(x_n)$$

gegen x^*.

Beweis :

Man rechne nach, dass $\{x_n\}$ eine Cauchy Folge ist.

Satz 22.2 : (Existenzsatz von Picard-Lindelöf)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer **lokalen** *Lipschitz-Bedingung bzgl. y auf G. Dann gibt es zu jedem $(a, \eta) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Funktion $\Psi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit*

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \eta \qquad (\underline{\textit{Anfangsbedingung}}) \\ \Psi'(x) &= f(x, \Psi, (x)) \ \textit{auf}\ [a - \varepsilon, a + \varepsilon]. \end{aligned}$$

Bemerkungen zum Satz von Picard-Lindelöf :

1) Satz 22.1 $\Longrightarrow$ Eindeutigkeit

2) man spricht von einem <u>lokalen</u> Existenzsatz, da Ψ und U nur auf einem *sehr kleinen* Intervall um a existiert.

3) Möglicherweise existiert die im Satz gewonnene Lösung aber auch auf einem größeren Intervall als $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.
Anders als bei linearen Problemen kann man bei nichtlinearen Problemen i.a. keine Existenz für alle Zeiten erwarten! (vgl. Zusatz zu Satz 22.2).

   Beispiel :

   $y'(x) = 1 + y^2(t),\ y(0) = 0,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
   wird eindeutig gelöst von $\mathbf{y(x)} = \tan \mathbf{x}$, wobei der Definitionsbereich dieser Lösung nicht vergrößert werden kann!

4) Eine Funktion $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **maximale Lösung** des AWP's

   $$\Psi'(x) = f(x, \Psi(x)),\ \Psi(a) = \eta,\ x \in I,$$

   wenn es **keine** Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ gibt, die auf einem Intervall $J \supsetneqq I$ erklärt ist.

   Man kann zeigen :

   Unter den Voraussetzungen von Satz 22.2 lässt sich die lokale Lösung Ψ zu einer maximalen Lösung fortsetzen.

Spezialfall :

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit einer lokalen Lipschitz Bedingung bzgl. $y \in \mathbb{R}^n$ und $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die **maximale Lösung** des AWP's

$$\Psi'(x) = f(x, \Psi(x)),\ \Psi(a) = \eta.$$

Seien $\alpha < \beta$ die Grenzen von I. Dann gilt :

i) $\alpha = -\infty$ **oder**

ii) $\boxed{\alpha > -\infty}$: In diesem Fall ist $\lim\limits_{x \downarrow \alpha} \left|\Psi(x)\right| = \infty$

iii) $\beta = \infty$ **oder**

iv) $\boxed{\beta < \infty}$: In diesem Fall ist $\lim\limits_{x \uparrow \beta} \left|\Psi(x)\right| = \infty$.

5) Falls f nur stetig ist, kann man noch lokale Existenz beweisen, hat aber keine Eindeutigkeit. (**Satz von Peano**)

6) Man kann die Größe von ε genau ausrechnen. Das ergibt unter Umständen globale Existenzsätze. (vgl. Zusatz zu Satz 22.2)

Beweis :

Wir beginnen mit einer Umformulierung des Problems

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interfall mit $a \in I, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Dann gilt :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(a) & = & \eta \\ \varphi'(x) & = & f(x, \varphi(x)),\ x \in I \end{array}\right\} \quad \text{“Anfangswertproblem”}$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{\iff} \quad \varphi(x) = \eta + \int\limits_a^x f(t, \varphi(t))\, dt,\ x \in I \qquad \text{“Integralgleichung”}$$

$$\iff \quad T(\varphi) = \varphi \qquad (*) \qquad \text{“Fixpunktproblem”}$$

mit dem Opteraror $T(\varphi)(x) := \eta + \int\limits_a^x f(t, \varphi(t))\, dt,\ x \in I$.

Nun richten wir “alles” so ein, dass wir den Fixpunktsatz angewenden können :

Sei $r > 0$ so, dass

$$V := [a - r, a + r] \times \overline{B}_r(\eta) \subset G$$

und f auf V Lipschitz ist mit Konstante $L > 0$. Dann gilt

$$V \text{ kompakt, } f \text{ stetig} \Longrightarrow M := \sup_V |f| < \infty.$$

Sei $\varepsilon < r$ noch beliebig, $I := [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Setze nun :

$$\begin{aligned} X &:= \Big(C^\circ(I,\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty\Big), \\ A &:= \Big\{\varphi \in X : \|\varphi - \eta\|_\infty \leq r\Big\} \ \ (\|\varphi(t)\|_\infty := \sup_{t\in I} |\varphi(t)|), \\ T &: \quad A \longrightarrow X \text{ wie vorhin.} \end{aligned}$$

Beachte :

- A ist *abgeschlossene* Kugel um die konstante Funktion η
- $x \mapsto \eta + \int\limits_a^x f\Big(t, \varphi(t)\Big)\, dt,\ x \in I$, ist nach dem Hauptsatz sogar C^1, also ein Element von X

Zeige :

1) $\underline{T(A) \subset A}$

   Sei $\varphi \in A \Longrightarrow \|T(\varphi) - \eta\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} \Big| \int\limits_a^x f\Big(t, \varphi(t)\Big)\, dt\Big|$

   Es ist

   $$|t - a| \leq |x - a| \leq \varepsilon < r \text{ und } |\varphi(t) - \eta| \leq r, \text{ da } \varphi \in A$$

   $$\Longrightarrow \Big(t, \varphi(t)\Big) \in V, \text{ so dass } \sup_{x\in I} \Big| \int\limits_a^x f\Big(t, \varphi(t)\Big)\, dt\Big| \leq M \cdot \varepsilon$$

   Wir verlangen : $\boxed{M \cdot \varepsilon < r}$ $(*)$

   $\Longrightarrow \|T(\varphi) - \eta\| \leq r$, d.h. 1) gilt.

2) T ist (bei passender Wahl von ε) <u>streng kontrahierend</u>

   Seien $\varphi, \Psi \in A \overset{s.o.}{\Longrightarrow} \Big(t, \varphi(t)\Big),\ \Big(t, \Psi(t)\Big) \in V\ \forall\, t \in I.$

   Also gilt :

   $$\|T(\varphi) - T(\Psi)\|_\infty = \sup_{x\in I} \Big| \int\limits_a^x \Big(f\Big(t, \varphi(t)\Big) - f\Big(t, \Psi(t)\Big)\Big)\, dt\Big| \leq L \cdot \varepsilon \cdot \|\varphi - \Psi\|_\infty.$$

   In Ergänzung zu $(*)$ sei noch : $\boxed{L \cdot \varepsilon \leq \frac{1}{2}}$

   Erfüllt ε all diese Bedingungen, so gibt es $\varphi \in A$ mit $T(\varphi) = \varphi$.
   $\varphi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist dann die gesuchte Lösung.

$\square$

Zusatz zu 22.2 : (globale Existenz bei linearem Wachstum)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall (auch $I = \mathbb{R}$), $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig mit (globaler) partieller Lipschitz-Bedingung bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen. Außerdem sei F höchstens linear wachsend in y, d.h. es gibt $a, b \geq 0$ mit

$$\boxed{|F(x,y)| \leq a|y| + b \quad \forall\ (x,y) \in I \times \mathbb{R}^n.}$$

Seien $(x_\circ, \eta) \in I \times \mathbb{R}^n$. Dann gibt es **genau eine** auf ganz I definierte Lösung

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n \quad \text{des AWP} : y'(x) = F(x, y(x)),\ y(x_\circ) = \eta,\ x \in I$$

Bemerkung :

hier wird also I vorgegeben!

Beweis :

siehe Übung

Anwendung : (s. später)

$y'(x) = A(x) \cdot y(x) + b(x)$ (lineares System)

mit stetiger $(n \times n)$-Matrix A und $b \in C^\circ(I, \mathbb{R}^n)$, $|A(x)|,\ |b(x)| \leq \text{const} < +\infty$

Hier : $F(x,y) = A(x)y + b(x)$

Explizite Gleichungen und Systeme beliebiger Ordnung

Satz 22.1 und Satz 22.2 gelten für explizite Gleichungen und Systeme **1^{ter} Ordnung**.

Daher benutzt man bei der Lösung expliziter Gleichungen k^{ter} Ordnung einen "Trick", mit dessen Hilfe man diese Gleichungen auf Systeme 1^{ter} Ordnung reduziert :

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ *offen*, $f : G \to \mathbb{R}$ *stetig*. Betrachte für y : Intervall $I \longrightarrow \mathbb{R}$ die explizite *Gleichung* k^{ter} Ordnung.

(1) $$y^{(k)}(x) = f\Big(x, \underbrace{y(x), y'(x) \ldots, y^{(k-1)}(x)}_{\in \mathbb{R}^k}\Big),\ x \in I.$$

$$\Big(\ \text{z.B.}\ \ y^{(4)}(x) = x^2 y(x) + \Big(y''(x)\Big)^3 + y'''(x)\Big)$$

Definiere mit einer Lösung y die <u>Vektorfunktion</u>

$$Y(x) := \Big(y(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)\Big) \quad (\in \mathbb{R}^k)$$

Schreibt man Y in der Form $\Big(Y_\circ, \ldots, Y_{k-1}\Big)$, so gelten die folgenden Gleichungen :

$$(2) \qquad \begin{cases} Y_\circ'(x) & = & Y_1(x) \\ Y_1'(x) & = & Y_2(x) \\ \vdots & & \\ Y_{k-1}'(x) & = & f\Big(x, Y(x)\Big), \end{cases}$$

wobei die letzte Zeile offenbar genau der Gleichung (1) entspricht.

Sei $F : G \longrightarrow \mathbb{R}^k,\ F(x, Z) := \Big(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, f(x, Z_\circ, \ldots, Z_{k-1})\Big) \in \mathbb{R}^k$ für $Z = \Big(Z_\circ, \ldots, Z_{k-1}\Big)$. Dann liest sich (2) als

$$(2)^* \qquad Y'(x) = F\Big(x, Y(x)\Big).$$

Ergebnis :

$$y(x) \text{ löst } (1) \Longrightarrow Y(x) = \Big(y(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)\Big) \text{ löst } (2)^*$$

umgekehrt :

Sei $Y(x) = \Big(Y_\circ(x), \ldots, Y_{k-1}(x)\Big)$ Lösung von $(2)^*$ mit obigem F.

$\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} y(x) := Y_\circ(x)$ löst (1) $\quad \Big($ zeige : $Y_1 = Y_\circ', Y_2 = Y'^1, \ldots \Big)$

Es besteht also eine bijektive Beziehung zwischen den Lösungen von (1) und $(2)^*$.

Außerdem sieht man :

> Lösungen Y zu $(2)^*$ sind *eindeutig* (unter vernünftigen Bedingungen zu F), wenn $Y(x_\circ)$ zu einer Zeit $x_\circ$ vorgeschrieben wird. Also müssen bei einer Gleichung k^{ter} Ordnung k Vorgaben $y(x_\circ), y'(x_\circ), \ldots, y^{(k-1)}(x_\circ)$ gemacht werden.

Beachte nun noch :

lokale Lipschitz-Bedingung von	$\Longleftrightarrow$	$\ldots$	$F : G \longrightarrow \mathbb{R}^k$
$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ bzgl. der $\mathbb{R}^k$-Variablen		$\ldots$	

Mithin gilt dann folgendes Korollar :

Korollar (zu 22.1 und 22.2) :

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle bzgl. der $\mathbb{R}^k$-Variablen eine lokale Lipschitz-Bedingung auf G.

a) Seien $\varphi, \Psi : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von

$$(*) \quad y^{(k)} = f\Big(\cdot, y, \dots, y^{(k-1)}\Big)$$

auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sei $a \in I$ gegeben mit

$$\varphi(a) = \Psi(a),\ \varphi'(a) = \Psi'(a), \dots, \varphi^{(k-1)}(a) = \Psi^{(k-1)}(a).$$

Dann gilt $\varphi = \Psi$ auf I.

b) Ist $(a, \eta_\circ, \dots, \eta_{k-1}) \in G$ beliebig, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi : [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}$ von $(*)$ mit $\varphi(a) = \eta_\circ,\ \varphi'(a) = \eta_1, \dots,\ \varphi^{(k-1)}(a) = \eta_{k-1}$.

□

Bemerkung :

Systeme der Ordnung $k \geq 2$ lassen sich auf Systeme der Ordnung 1 mit entsprechend mehr Komponenten reduzieren $\longrightarrow$ Korrolar anwendbar

Beispiel zur Bemerkung :

Reduktion eines Systems 2^{ter} Ordnung auf ein System 1^{ter} Ordnung

Bewegungsgleichung : („ $\dot{}$ " bedeutet $\frac{d}{dt}$)

System 2^{ter} Ordnung :

$$\ddot{X}(t) = F\Big(t, X(t), \dot{X}(t)\Big)$$
$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$X : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (Ortsvektor).}$$

Setze $\quad Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad Y(t) := \Big(X(t), \dot{X}(t)\Big) \quad \Longrightarrow$

$$(*) \quad \dot{Y}(t) = \Big(Y_4(t), Y_5(t), Y_6(t), F^1\Big(t, Y(t)\Big), F^2\Big(t, Y(t)\Big), F^3\Big(t, Y(t)\Big)$$

wobei $\quad Y = (Y_1, \dots, Y_6),\ F = (F^1,\ F^2,\ F^3)$.

$(*)$ ist System $\underline{1^{\text{ter}}\text{ Ordnung}}$ für die Funktion Y mit $\underline{6\text{ Komponenten}}$.

Eine allgemeine Formulierung des Transformationsprinzips für Systeme der Ordnung k bringt keine neuen Einsichten. Es sollte klar sein, wie es funktioniert.

□

Elementare Lösungsmethoden

Regelfall :

Differentialgleichungen $y^{(k)} = f\Big(\cdot, y, y', \ldots, y^{(k-1)}\Big)$ (+ Anfangsbedingung) lassen sich **nicht elementar** lösen, d.h. es gelingt nicht, Lösungen *in geschlossenen Formeln* $y(x) = \ldots$ anzugeben.

Methode :

Wir haben Picard-Lindelöf; dieser Satz benutzt ein Fixpunktprinzip, d.h. die Lösung y wird konstruiert als Limes einer Folge $\{y_n\}$ mit

$$\begin{aligned} y_\circ &= \text{beliebige Startfunktion,} \\ y_n &= \text{Integraloperator angewendet auf } y_{n-1} \end{aligned}$$

Man kann diese Vorschrift ohne weiteres *numerisch umsetzen* und somit die exakte Lösung y beliebig gut approximieren. *Fehlerabschätzungen* der Form $\|y - y_n\| \cong 1/n$ geben Information, wie weit man noch von der Lösung entfernt ist.

In einigen Spezialfällen lassen sich Lösungen nun doch explizit bestimmen. Die wichtigsten Verfahren sind nachfolgend kurz zusammengestellt.

1) Separation der Variablen

Seien I, J Intervalle $\subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(1) $\boxed{y'(x) = f(x) \cdot g\Big(y(x)\Big)}$ auf I ist zu lösen.

Angenommen, (1) hat Lösung $y(x)$, dann gilt :

Sei G Stammfunktion zu $1/g$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} && y'(x)\Big/g\Big(y(x)\Big) = \tfrac{d}{dx}G\Big(y(x)\Big), \\ &\text{also} && \tfrac{d}{dx}G\Big(y(x)\Big) - f(x) = 0 \\ &\Longrightarrow && G\Big(y(x)\Big) = F(x) + c,\ F \text{ Stammfunktion zu } f,\ c \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \end{aligned}$$

Nun löse umgekehrt diese Gleichung, falls möglich (siehe Satz 22.3), nach $y(x)$ auf und zeige, dass (1) gilt.

Die genaue Formulierung gibt uns der folgende Satz :

Satz 22.3 :

Sei $(x_\circ; y_\circ) \in I \times J,\ f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig mit* $g(y) \neq 0$ *auf* J.
Man setze

$$F(x) := \int\limits_{x_\circ}^{x} f(t)dt,\ x \in I; \quad G(y) := \int\limits_{y_\circ}^{y} \frac{dt}{g(t)},\ y \in J$$

Sei $I' \subset I$ *ein Intervall mit* $x_\circ \in I'$ *und* $\boxed{F(I') \subset G(J).}$ $\quad (*)$

Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ *von (1) mit* $\varphi(x_\circ) = y_\circ$.

Es gilt : $G\Big(\varphi(x)\Big) = F(x)$ *für alle* $x \in I'$.

Beweis :

beachte : G ist streng monoton : $G' = g$ und $g \neq 0$, somit ist $\varphi(x) = G^{-1}\Big(F(x)\Big)$

aus $(*)$ folgt $\operatorname{Bild} F \subset \operatorname{Def} G^{-1} = \operatorname{Bild} G$, so dass $G^{-1} \circ F$ Sinn macht.

$\longrightarrow$ genaueres siehe Übung!

□

Beispiel :

$(*) \quad \boxed{y'(x) = y^2(x)}$

hier : $f(x) = 1,\ g(y) = y^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$

<u>gesucht</u> : Lösung φ von $(*)$ mit $\varphi(0) = c,\ c \in \mathbb{R}$

Rechte Seite $(x, y) \mapsto y^2$ genügt *lokaler Lipschitz Bedingung* auf $\mathbb{R}^2$ bzgl. der y-Variablen

$\overset{Satz 22.2}{\Longrightarrow}$ $\exists!$ Lösung φ lokal bei 0 definiert

(i) $c = 0 \quad \overset{Satz 22.2}{\Longrightarrow} \quad \varphi \equiv 0$ eindeutige Lösung (klar!)

(ii) $c > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists$ Intervall $I_\circ$ um 0 und $\varphi : I \to \mathbb{R}$
mit $\varphi(0) = c,\ \varphi'(x) = \varphi^2(x)$

<u>Annahme</u> : $\varphi(x) \leq 0$ für **ein** $x \in I_\circ$

$\overset{\text{da } \varphi(0)>0}{\Longrightarrow} \quad \exists\, x_\circ$ mit $\varphi(x_\circ) = 0$

$\overset{\text{Eindeutigkeitssatz 22.1}}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 0$ auf $I_\circ$! (Widerspruch!)

<u>Also</u> : $\varphi > 0$ auf $I_\circ$.

Wie groß ist $I_\circ$? Wie sieht φ aus ?

Man kann in 22.3 $J = (0, \infty)$ wählen,

$g(y) = y^2$ ist dort $\neq 0 \quad \Longrightarrow \quad G(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}, \ y \in J;$

$F(x) = \int\limits_0^x dt = x.$

Es gilt : $G(J) = (-\infty, 1/c)$

$\Longrightarrow I' := (-\infty, 1/c)$ erfüllt $F(I') \subset G(J)$.

Somit ist die Lösung φ auf $(-\infty, 1/c)$ definiert. Nun betrachte

$$G\Big(\varphi(x)\Big) = F(x) \iff \frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)} = x$$

$$\iff \underline{\varphi(x) = \frac{c}{1 - cx}, \ x \in (-\infty, 1/c).}$$

(iii) $c < 0$:

analog : $\varphi : (\frac{1}{c}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \ \varphi(x) = \frac{c}{1-cx}$ für $x > 1/c$.

$\square$

Bemerkung :

Man sieht die Nützlichkeit von Satz 22.1 und Satz 22.2, da diese Sätze vorweg schon Informationen liefern.

2) Reduktion auf getrennte Veränderliche

(i) $\boxed{y'(x) = f\Big(a \cdot x + by(x) + c\Big)}$, $a, \ b, \ c \in \mathbb{R}, \ b \neq 0, \ f$: Intervall $\longrightarrow \mathbb{R}$

Setze $\boxed{v(x) := ax + by(x) + c}$

$\Longrightarrow \quad v'(x) = a + bf\Big(v(x)\Big)$

beachte : die Anfangsbedingungen für y müssen auch transformiert werden!

(ii) $\boxed{y'(x) = f\Big(y(x)\Big/x\Big)}$

Setze $\boxed{u(x) := \ y(x)\Big/x}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad u'(x) &= \tfrac{1}{x^2}\Big(x \cdot y'(x) - y(x)\Big) \\ &= \tfrac{1}{x} \cdot f(u(x)) - \tfrac{1}{x} \cdot u(x) \\ &= \tfrac{1}{x}\Big(f(u(x)) - u(x)\Big) \end{aligned}$$

Also $\quad u'(x) = A(x) \cdot B\Big(u(x)\Big)\,, \;\; A(x) := \frac{1}{x},\;\; B(u) := f(u) - u$

Beispiel :

$$y'(x) = 1 + \tfrac{1}{x}y(x) + \Big(\tfrac{1}{x}y(x)\Big)^2 \text{ für } x > 0 \quad \Big(f(u) := 1 + u + u^2\Big)$$

$$\begin{aligned} \overset{u(x)=y(x)/x}{\Longrightarrow} \qquad u'(x) &= \tfrac{1}{x}\Big(1 + u(x) + u(x)^2 - u(x)\Big) \\ &= \tfrac{1}{x}\Big(1 + u^2(x)\Big) \\ &\Rightarrow \tfrac{u'(x)}{1+u^2(x)} = 1/x \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \tfrac{d}{dx}\Big(\arctan u(x)\Big) = \tfrac{1}{x} = \tfrac{d}{dx}\ln x$$

$$\Longrightarrow \qquad u(x) = \tan\Big(c + \ln x\Big)$$

$$\Longrightarrow \qquad \underline{y(x) = x \cdot \tan\Big(x + \ln x\Big)},\;\; x > 0.$$

3) Lineare Differentialgleichungen 1^{ter} Ordnung

Seien gegeben : $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a,\, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

betrachte $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$ auf I

homogener Fall : $b \equiv 0$

Satz 22.4 :

Seien $x_\circ \in I,\ c_\circ \in \mathbb{R}$. Dann gibt es **genau eine** *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) \ \text{mit}\ y(x_\circ) = c$$

Es ist $\quad y(x) \ = \ \exp\Big(\int\limits_{x_\circ}^{x} a(t)\,dt\Big) \cdot c_\circ.$

Beweis :

1) Eindeutigkeit : Satz 22.1!

2) Existenz : leite die Formel ab!

□

Konstruktion von Lösungen im inhomogenen Fall $b \neq 0 \longrightarrow$ "Variation der Konstanten"

Sei φ eine Lösung $\neq 0$ der homogenen Gleichung $y'(x) = a(x)\,y(x)$
(beachte : $\varphi \not\equiv 0 \Longrightarrow \varphi$ ist nirgends $= 0$ nach 22.1).
Bestimmung einer Lösung $\Psi : \ I \to \mathbb{R}$ von

$$(*) \qquad y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$$

durch den
Ansatz : $y(x) = u(x) \cdot \varphi(x)$ (multipliziere φ mit einem von x abhängigen Faktor)

Dann :

$$\begin{aligned}
\Psi'(x) &= u'(x) \cdot \varphi(x) + u(x) \cdot \varphi'(x) \\
&= u'(x) \cdot \varphi(x) + u(x) \cdot a(x) \cdot \varphi(x) \\
&\overset{!}{=} a(x) \cdot u(x) \cdot \varphi(x) + b(x)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad u'(x) = b(x) \Big/ \varphi(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad u(x) = \left(\text{Stammfkt. zu } \frac{b}{\varphi}\right) + \text{const}$$

Probe : definiere u durch diese Gleichung und setze $\Psi(x) = u(x)\,\varphi(x) \Longrightarrow \Psi$ löst $(*)$.

Nach 22.1 hat $*$ bei Vorgabe eines Anfangswerte $y(x_\circ) = c_\circ$ höchstens eine Lösung. Beachtet man noch 22.4, also die Formel für φ, so folgt :

Satz 22.5 :

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : \ I \to \mathbb{R}$ seien stetig. Dann gibt es zu jedem $x_\circ \in I$ und jedem $c_\circ \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $\Psi : \ I \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned}
y(x_\circ) &= c_\circ \\
y'(x) &= a(x)\,y(x) + b(x) \ \textit{auf } I.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \Psi(x) & = & \varphi(x)\Big(c_\circ + \int\limits_{x_\circ}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,dt\Big), \\ \varphi(x) & = & \exp\Big(\int\limits_{x_\circ}^{x} a(t)\,dt\Big) \qquad \Big(\Longrightarrow \varphi(x_\circ) = 1\Big) \end{array}}$$

Beispiel :

$y'(x) = 2x \cdot y(x) + x^3, \quad y(0) = c_\circ$

Mit den Bezeichnungen aus dem Satz gilt :

$$\varphi(x) = \exp\Big(\int\limits_{x_\circ}^{x} 2t\,dt\Big) = \exp t^2\Big|_{x_\circ}^{x} = e^{x^2}$$

löst für $x_\circ = 0$ das homogene Problem $\varphi' = a \cdot \varphi$, $\varphi(0) = 1$

$$\begin{array}{rcl} \Longrightarrow \Psi(x) & = & e^{x^2} \cdot \Big(c_\circ + \underbrace{\int\limits_{0}^{x} e^{-t^2} \cdot t^3\,dt}_{\overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+x^2)\,e^{-x^2}}\Big) \\ & = & \Big(c + \frac{1}{2}\Big)\,e^{x^2} - \frac{1}{2}\,(1+x^2). \end{array}$$

4) Lineare Systeme 1^{ter} Ordnung

(enthält als Spezialfall lineare Gleichungen n^{ter} Ordnung (via Reduktion)).

4 a) Allgemeiner Fall :

Voraussetzungen :

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $A \in C^\circ(I, \mathbb{R}^n)$, d.h. $A(x) = \Big(a_{ij}(x)\Big)_{1 \le i,j \le n}$ mit stetigen Funktionen $a_{ij} : I \to \mathbb{R},\ b \in C^\circ(I, \mathbb{R}),\ b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Inhomogenes System :

$$\begin{array}{lrcl} (1) & y'(x) & = & A(x)\,y(x) + b(x) \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Homogenes Sysstem :

(2) $\quad y'(x) = A(x)\,y(x)$

bemerke : Satz 22.2 $\Longrightarrow$ lokale Existenz von Lösungen.

Wir werden zeigen :

- Lösungen zu (1), (2) existieren nach dem Zusatz zu 22.2 auf ganz I
- vollständige Beschreibung der Lösungsmenge !

Notation :

Differentialoperator

$L : C^1(I,\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\circ(I,\mathbb{R}^n)$, $L := \frac{d}{dx} - A(x)$,
d.h. $L(y)(x) := y'(x) - A(x)\,y(x)$

bemerke :

- L ist ein linearer Operator
- Lösungsmenge des homogenen Systems
$=$ Nullraum $N(L)$ von L $\Big(= \{y \in C^1(I,\mathbb{R}^n) : L(y) = 0\}\Big)$

Satz 22.6 :

$\boxed{\dim N(L) \;=\; n}$

D.h. : *(i)* *Es gibt n linear unabhängige Lösungen des homogenen Problems*
(ii) *$n+1$ Lösungen des homogenen Problems sind linear abhängig.*

Wir brauchen ein

Lemma :

Seien $y^1, \ldots, y^n \in N(L)$, $y^i = (y^i_1, \ldots, y^i_n)$
Man setzt $\Delta(x) = \det\Big(y^1(x) \ldots y^n(x)\Big)$ (y^i als Spaltenvektoren)
Dann gilt :

i) $\Delta(x_\circ) = 0$ für ein $x_\circ \iff \Delta \equiv 0$ auf I
ii) $y^1, \ldots, y^n$ linear unabhängig $\iff \Delta$ ist nirgends 0

Beweis (Lemma) :

i) $\Delta(x_\circ) = 0$ für ein $x_\circ$

$\iff$ $y^1(x_\circ), \dots, y^n(x_\circ) \in \mathbb{R}^n$ sind linear abhängig

$\iff$ $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ nicht alle 0 mit $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i\, y^i(x_\circ) = 0.$

$y(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, y^i(x)$ löst $L(y) = 0$ auf I.

Aus $y(x_\circ) = 0$ folgt nach 22.1 $y(x) = 0\ \forall\, x \in I$.

Das bedeutet $\Delta(x) = 0$ auf I.

ii) $\Delta = 0$ für ein $x_\circ$

$\overset{\text{i)}}{\iff}$ $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, y^i \equiv 0$ auf I mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ nicht alle 0

$\iff$ $y^1, \dots, y^n$ linear abhängig.

Negation dieser Aussage ergibt ii)

$\square$

Beweis von 22.6 :

i) Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, $x_\circ \in I$ beliebig. Nach 22.2 und der anschließenden Verschärfung, $y'(x) = A(x)\, y(x) =: F(x, y(x))$ mit $|F(x,y) - F(x,\tilde{y})| \leq \|A(x)\| \cdot |y - \tilde{y}|$ (die wir jetzt zum ersten Mal brauchen!), gibt es $y^1, \dots, y^n \in N(L)$ mit $y^i(x_\circ) = e_i$.
Es ist

$$\Delta(x_\circ) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

also $y^1, \dots, y^n$ linear unabhängig.

ii) Seien $y^1, \dots, y^m \in N(L)$ mit $m > n$, $x_\circ \in I$.

$\implies$ $\exists\, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ nicht alle 0 mit $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i\, y^i(x_\circ) = 0,$
da $y^1(x_\circ, \dots, y^m(x_\circ)$ in $\mathbb{R}^n$ linear abhängig sind.

$y := \sum\limits_{i=1}^{m} c_i\, y^i$ gehört zu $N(L)$ mit $y(x_\circ) = 0 \overset{22.1}{\implies} y \equiv 0$

$\iff y^1, \dots, y^m$ linar abhängig.

$\square$

Definition 22.2 :

Eine Basis des Nullraumes von L heißt ein **Fundamentalsystem** *zum homogenen System.*

Bemerkung :

Für die *homogene Gleichung* $\varphi'(x) = a(x)\,\varphi(x)$ haben wir explizite Lösungsformeln, im Fall des Systems $y'(x) = A(x)\,y(x)$ gibt es solche Formeln nur, wenn die Matrix *konstant* ist (s. später).

Beispiel :

$$\left\{ \begin{array}{lcr} y_1' & = & -\alpha\, y_2 \\ y_2' & = & \alpha\, y_1 \end{array} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Lösungen :

z.B. $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos & \alpha x \\ \sin & \alpha x \end{pmatrix}, \ \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin & \alpha x \\ \cos & \alpha x \end{pmatrix}$

mit $\det\Big(\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)\Big) = \cos^2(\alpha x) + \sin^2(\alpha x) \equiv 1$

$\Longrightarrow \ \varphi_1, \varphi_2$ bilden Fundamentalsystem

$\longrightarrow$ Übung :

Umformung homogener linearer Gleichungen der Ordnung 2, 3 in Systeme 1^{ter} Ordnung, Fundamentalsysteme?

Wir gehen zurück zum inhomogenen System (1) und bestimmen Lösungen mit Konstantenvariation.

Satz 22.7 :

i) Sei $y^1, \ldots, y^n$ ein Fundamentalsystem zum homogenen System. Die reellen Funktionen $c_1, \ldots, c_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Lösungen von

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y^j(x) = b(x)$$

auf I. Dann ist $y^\circ(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y^i(x)$ Lösung von (1)
(ein sogenannte spezielle Lösung).

ii) Jede Lösung y von (1) hat die Form $y = y^\circ + h$ mit $L(h) = 0$.

Bemerkung :

Da $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ zu jeder Zeit x linear unabhängig sind, werden die Zahlen $c_i'(x)$ durch $(*)$ eindeutig festgelegt. Nun bestimme man Stammfunktionen!

Beweis :

(ii) klar!

(i) Seien die c_i gemäß$(*)$ berechnet

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y^i(x)\Big) &= \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y^i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \frac{d}{dx}\, y^i(x) \\
&= b(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, A(x)\, y^i(x) \\
&= b(x) + A(x)\, \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y^i(x)\Big)
\end{aligned}
$$

$\square$

Bemerkung :

Zur Lösung des AWP

$$
\begin{aligned}
y(x_\circ) &= \eta \in \mathbb{R}^n \\
y'(x) &= A(x)\, y(x) + b\,(x)
\end{aligned}
$$

wähle man ein Fundamentalsystem $y^1, \ldots, y^n$ und berechne eine spezielle Lösung y°; dann setze man

$$
y(x) = y^\circ(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, y^i(x),
$$

wobei die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als Lösungen von $y^\circ(x_\circ) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, y^i(x_\circ) = \eta$ zu bestimmen sind.

Beispiel :

$$
\left\{ \begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 + x \end{aligned} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}
$$

Die Funktionen $(\cos x, \sin x)$, $(-\sin x, \cos x)$ bilden ein Fundamentalsystem zum homogenen Problem.

Ansatz :

$$
\begin{aligned}
& & c_1'(x)\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2'(x)\begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\
& & &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Also :

$$c_1'(x) = x \cdot \sin x,\ c_2'(x) = x \cdot \cos x$$

Wähle deshalb

$$c_1(x) = \sin x - x \cdot \cos x,\ c_2(x) = \cos x + x \cdot \sin x.$$

Es folgt dann als spezielle Lösung :

$$y_\circ(x) = (\sin x - x\ \cos x)\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + (\cos x + x \cdot \sin x)\begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

□

4 b) Spezialfall : Lineare Gleichungen höherer Ordnung

Solche Gleichungen lassen sich in Lineare Systeme 1^{ter} Ordnung transformieren, so dass man direkt die Sätze 22.6 und 22.7 anwenden kann. Die hierbei auftretenden Matrizen haben eine sehr spezielle Gestalt.

Notation :

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a_\circ, \ldots, a_{n-1}, b \in C^\circ(I, \mathbb{R}),\ y : I \to \mathbb{R}$

1) homogene Gleichung : $y^{(n)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x)$

2) inhomogene Gleichung : $y^{(n)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x) + b(x).$

Beispiel :

$$y^{(3)}(x) = x^2 \cdot y^{(2)}(x) + e^x \cdot y(x) + \sinh x$$

Satz 22.8 :

(i) Sei $H = \{\varphi \in C^n(I, \mathbb{R}) : \varphi$ *löst (1)* $\}$*. Dann ist* $\dim H = n$*.*

D.h. : Es gibt n *linear unabhängige Lösungen von (1),*
$m > n$ *Lösungen sind stets voneinander abhängig.*

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H$ *sind* **genau dann linear unabhängig***,*
wenn für ein $x \in I$ *(alle* $x \in I$*) gilt :*

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Man nennt dann $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *ein Fundamentalsystem.*

(ii) Sei $\Psi_\circ$ *eine spezielle Lösung von (2). Dann gilt :*

$$\text{Lösungsmenge von (2)} \;=\; \Psi_\circ + H.$$

Beweis :

Mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_\circ(x) & a_1(x) & \ldots & \ldots & a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

und

$$\bar{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

betrachte

$$\begin{array}{lrcll} (1)^* & Y'(x) & = & A(x)Y(x) & \text{und} \\ (2)^* & Y'(x) & = & A(x)Y(x) + \bar{b}(x) & \end{array}$$

Dann gilt :

$$\begin{aligned} & Y = (y_\circ, \ldots, y_{n-1}) \text{ löst } (1)^* \text{ bzw. } (2)^* \\ \iff & y_i = y'_{i-1} \text{ für } i \leq n-1 \text{ und } y_\circ \text{ löst } (1) \text{ bzw. } (2). \end{aligned}$$

Daraus folgen mit Satz 22.6 und 22.7 alle Aussagen.

□

Bemerkungen :

1) Für die spezielle Lösung $\Psi_\circ$ des inhomogenen Systems macht man den Ansatz

$$c_1(x)\,\varphi_1(x) + \ldots + c_n(x)\,\varphi_n(x) = \Psi_\circ(x)$$

mit einer Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von H. Die Funktionen c_i ergeben sich aus

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) \begin{pmatrix} \varphi_i(x) \\ \varphi_i'(x) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

($\varphi_i^{(j)}$ für $j = 0, \ldots, n-1$ und $b(x)$ sind Spaltenvektoren)

2) Behandlung des AWP :

Vorgabe von $\varphi(x_\circ), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_\circ)$

$$\Longrightarrow \varphi = \psi_\circ + \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i \varphi_i$$

$\tilde{c}_i$ derart dass AWP erfüllt.

Für lineare Gleichungen der Ordnung $n > 1$ mit *variablen* Koeffizienten gibt es *kein* Patentrezept zur Bestimmung eines Fundamentalsystems, dasgleiche gilt für Systeme mit variabler Koeffizientenmatrix. Aussagen sind manchmal für Gleichungen 2^{ter} Ordnung möglich. Hier gilt : *Hat man eine nichttriviale Lösung φ_1 des homogenen Problems bestimmt, so läßt sich diese zu einem Fundamentalsystem ergänzen.*

Satz 22.9 :

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in C^\circ(I, \mathbb{R})$ und $\varphi : \; I \to \mathbb{R}$ sei Lösung von

$$(*) \qquad y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0$$

Auf dem Intervall $J \subset I$ sei φ **ohne** *Nullstelle.*
Ist dann u eine **nicht-konstante** *Lösung der Gleichung.*

$$(**) \qquad u''(x) + \Big(2 \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x)\Big) \cdot u'(x) = 0 \qquad (\textit{Lösung davon s. später})$$

auf J, so ist

$$\Psi : J \to \mathbb{R}, \;\; \Psi := u \cdot \varphi,$$

eine **von φ unabhängige Lösung**, *d.h. $\{\varphi, \Psi\}$ ist ein Fundamentalsystem auf J.*

Beweis :

Man setzt $\Psi = \varphi \cdot u$

$\Longrightarrow \quad \Psi' = \varphi' u + u' \varphi$ und $\Psi'' = \varphi'' u + u'' \varphi + 2u' \, \varphi'$;

benutze $(*)$ für φ

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \Psi'' + a \cdot \Psi' + b\,\Psi &= \underbrace{[-u(\overbrace{a\varphi' + b\,\varphi}^{\overset{(*)}{=}-\varphi''}) + u''\varphi + 2u'\,\varphi']}_{=\Psi''} + a(\underbrace{\varphi' u + u'\varphi}_{=\Psi'}) + b\,u\,\varphi \\
&= u'' \cdot \varphi + a u' \varphi + 2u' \varphi' \\
&= \varphi \left[u'' + u' \Big(a + 2\tfrac{\varphi'}{\varphi} \Big) \right]
\end{aligned}$$

Ergebnis :

$$\Psi \text{ löst } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad [\ldots] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ erfüllt } (**).$$

Probe der Linearen Unabhängigkeit :

$$\det \begin{pmatrix} \varphi & u \cdot \varphi \\ \varphi' & u'\varphi + \varphi' u \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \varphi^2 \cdot u' + \varphi' \varphi u - u \varphi \varphi' = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad u' \cdot \varphi^2 = 0 \\
&\overset{\varphi^2 > 0}{\Longleftrightarrow} \quad u' = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad u = \text{const.}
\end{aligned}$$

u wird aber als nicht-konstant angenommen.

□

Bemerkung : zu Differentialgleichung $(**)$:

$(**)$ tritt als zusätzliche Differentialgleichung bei der Anwendung des Verfahrens auf. Diese Gleichung läßt sich aber mittels Reduktion der Ordnung unschwer lösen :

$$v := u' \quad \Longrightarrow \quad v' + \Big(2 \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + a \Big) \cdot v = 0$$

$\Longrightarrow$ homogene Gleichung 1^{ter} Ordnung für v

$$\overset{22.4}{\Longrightarrow} \quad v(x) = \exp\Big(\int_{x_\circ}^{x} 2\frac{\varphi'}{\varphi} + a\,dt \Big)$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = \int_{x_\circ}^{x} v(t)\,dt.$$

□

Beispiele und Bemerkungen zu Linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung mit variablen Koeffizienten

betrachte $y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0$ auf $I \subset \mathbb{R}$.

bisherige Annahme : a, b nur stetig.

Macht man sehr **viel stärkere Annahmen**, so gelingt es manchmal, eine nicht-triviale Lösung φ von $(*)$ zu konstruieren. Dann kann man unter Umständen Satz 22.9 benutzen und erhält ein Fundamentalsystem, also mit 22.8 eine Übersicht über die Lösungsgesamtheit auch im inhomogenen Fall. Das Stichwort ist

Potenzreihenansatz : $(\longrightarrow$ Übung!)

Voraussetzung :

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_\circ)^k, \;\; b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x - x_\circ)^k,$$

d.h. : die Koeffizienten $a(x), b(x)$ in $(*)$ lassen sich um $x_\circ \in I$ als konvergente Potenzreihen schreiben.

Dann setzt man

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_\circ)^k,$$

d.h. *man geht davon aus, dass es eine analytische Lösung gibt.*

Einsetzen + Identitätssatz

$\Longrightarrow$ Rekursionsformeln für γ_k in Termen von α_k, β_k

danach :

Probe, ob $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_\circ)^k$ auf Umgebung von $x_\circ$ konvergent ist !

falls ja :

Rechnungen wie

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_\circ)^k\Big)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\gamma_k (x - x_\circ)^{k-2}$$

sind erlaubt.

$\Longrightarrow$ $y(x)$ löst die Differentialgleichung.

Übung :

(1) **Legendre-DGL. :**

$$\boxed{(1+x^2)\,y''(x) - 2x\cdot y'(x) + n(n+1)\,y(x) = 0 \quad \text{auf } (-1,1),\ n\in\mathbb{N}_\circ}$$

(kommt in der theor. Physik vor)

Potenzreihenansatz liefert :

$\Longrightarrow$ $\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n}$ Legendre-Polynom (der Ordnung n).

(2) **Hermite-DGL. :**

$$\boxed{y''(x) - 2xy'(x) + 2n\,y(x) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_\circ}$$

Potenzreihenansatz ergibt :

$\Longrightarrow$ $\boxed{H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}}$ Hermite-Polynom (der Ordnung n).

P_n bzw. H_n sind Lösungen zu (1) bzw. (2) für das jeweilige n.

Wir konstruieren für die Legendre-Dgl. mit $n = 1$ ein Fundamentalsystem :

$$\begin{aligned} & (1-x^2)\,y''(x) - 2x\,y'(x) + 2\cdot y(x) &=& \ 0 \quad \text{auf } (-1,1)\\ \Longleftrightarrow \quad & y''(x) - \tfrac{2x}{1-x^2}\,y'(x) + \tfrac{2}{1-x^2}y(x) &=& \ 0 \quad \text{auf } (-1,1) \end{aligned}$$

bekannte Lösunge : $\varphi(x) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x = P_1(x)$

Ansatz : $\Psi(x) = u(x)\cdot x$ auf $(0,1)$ (dort ist $\varphi \neq 0$!)

$\Longrightarrow$ Dgl. für u gemäß 22.9 :

$$u''(x) + \left(2\frac{1}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)u'(x) = 0$$

oder mit $v := u'$:

$$v'(x) + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)v(x) = 0$$

Lösungsformel : $v(x) = \exp\left(\text{Stammfunktion zu } \frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)$ (vgl. Satz 22.4)

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad v(x) &= \exp\Big(-2\cdot\ln x - \ln(1-x^2)\Big) = \tfrac{1}{x^2\cdot(1-x^2)}\\ &= \tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1-x} + \tfrac{1}{1+x}\right)\\ \Longrightarrow \quad u(x) &= \int v(x)\,dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ \ln\frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

Es folgt : $\Psi(x) = x \cdot u(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1.$

Bei der Anwendung von 22.9 mußten wir uns auf ein Intervall $J \subset (-1,1)$ ohne Nullstelle von $\varphi(x) = x$ beschränken, also etwa auf $(0,1)$.

Eine Probe zeigt aber :

$\Psi(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$ ist auf $(-1,1)$ definierte Lösung der Dgl. und spannt mit φ den Lösungsraum auf.

5) Lineare Systeme 1^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten und (lineare Gleichungen n^{ter} Odnung mit konstanten Koeffizienten)

Sind im Prizip die einzigen Fälle, für die es systematische Methoden zur Bestimmung von Fundamentalsystemen gibt.

Betrachte das System

(1) $y' = A\,y, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

mit **konstanter** $n \times n$ - Matrix $A = (a_{ij})$;

Lösungen existieren auf ganz $\mathbb{R}$ (nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Fall $n = 1$:

$y' = a \cdot y$ mit $a \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = e^{ax}$ ist Lösung (dim des Lösungsraumes $\equiv 1$)

Deshalb machen wir den Exponentialansatz :

(2) $\boxed{y(x) = e^{\lambda x}\, v,\ \lambda \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$.

dann ist :

$y'(x) = \lambda \cdot y(x),$

also gilt :

$$\begin{aligned} & y'(x) = A\,y(x) \\ \Longleftrightarrow \quad & \lambda\, e^{\lambda x}\, v = e^{\lambda x} A\, v \\ \Longleftrightarrow \quad & \boxed{Av = \lambda v} \qquad v \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda \end{aligned}$$

D.h. : Wir müssen zur Lösung von (1) mit dem Ansatz (2) **Eigenwerte** von A und **Eigenvektoren** bestimmen.

Da die Eigenwerte reeller Matrizen auch komplex sein können, betrachten wir zunächst die

komplexe Situation : $\begin{cases} A \in \mathbb{C}^{n \times n} & \text{komplexe } n \times n \text{ Matrix} \\ y :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, & y' = A\,y \text{ auf } \mathbb{R} \end{cases}$

Dann gilt wie oben mit $\lambda \in \mathbb{C},\ v \in \mathbb{C}^n$:

$$\boxed{y(x) = e^{\lambda x} v \text{ Lsg.} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ E.W. von } A,\, v \text{ E.V. zu } \lambda}$$

Die Eigenwerte von A ergeben sich als Nullstellen des

charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\ \mathrm{Id})$.

$P_A(\lambda)$ ist ein Polynom vom Grad n über $\mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ $\exists\ n$ Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von $P_A(\lambda)$ nicht notwendig alle verschieden, d.h. es können Vielfachheiten > 1 auftreten.

Fassen wir die Ergebnisse in folgenden Satz zusammen :

Satz 22.10 :

Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}\, v$ ist Lösung genau dann, wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor ist. Die Lösungen $e^{\lambda_k x}\ v_k$ sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$ genau dann, wenn die Vektoren v_k linear unabhängig sind.
Speziell :

$$\lambda_k \neq \lambda_\ell \quad \Longrightarrow \quad y_k(x) = e^{\lambda_k x} v_k,\ y_\ell(x) = e^{\lambda_\ell x} v_\ell \ \underline{\textit{sind linear unabhängig}}.$$

Beweis der letzten Aussage :

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C},\ M \leq n$, komplexe Eigenwerte (nicht notwendig alle verschieden), $w_1, \ldots, w_M$ zugehörige E.V. $\in \mathbb{C}^n$. Setze

$$y_\ell(x) = e^{\alpha_\ell \cdot x} w_\ell \quad \text{und} \quad y(x) = \sum_{\ell - 1}^{M} \beta_\ell\, y_\ell(x) \text{ mit Koeffizienten } \beta_\ell \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt :

$$y' = A\, y \quad \text{und} \quad y(0) = \sum_{\ell=1}^{M} \beta_\ell\, w_\ell.$$

Außdem :

$\{w_1, \ldots, w_M\}$ linear abhängig

$\Longleftrightarrow$ $y(0) = 0$ für passende Wahl von $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$ nicht alle 0

$\Longleftrightarrow$ $y \equiv 0$ nach dem Eindeutigkeitssatz 22.1, der auch in der $\mathbb{C}^n$ – wertigen Situation gilt (da $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$)

$\Longleftrightarrow$ $y_1, \ldots, y_M$ sind linear abhängig

Dass für Eigenwerte $\mu \neq \lambda$ die Lösung linear unabhängig sind, folgt aus der Unabhängigkeit der Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

$\square$

Korollar ("Idealfall") :

Besitzt A **n linear unabhängige Eigenvektoren** $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig verschieden), so bilden die Funktionen $\mathbf{y_k(x) = e^{\lambda_k x}\, v_k}$, $k = 1, \ldots, n$, ein **Fundamentalsystem über** $\mathbb{C}$, d.h. jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ läßt sich aus $y_1, \ldots, y_n$ erzeugen,. Das gilt insbesondere dann, wenn es n verschiedene Eigenwerte gibt.

Bemerkung :

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ kommt nur 1 als Eigenwert mit Vielfachheit n vor, der Eigenraum von 1 ist trivialerweise n dimensional.

Wie kommt man zu reellen Lösungen, wenn A reell ist?

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $A,\ v \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor zu λ

$\Longrightarrow \quad y(x) = e^{\lambda x}\, v$ ist Lösung.

Schreibe

$$\lambda = \alpha + i\beta,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R};\ v = u + iw,\ u,\ w \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ e^{\lambda x}\, v &= e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)(u + iw) \\ &= \underbrace{e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x)u - \sin(\beta x)w\right)}_{:= z(x)} + i\, \underbrace{e^{\alpha x}\left(\sin(\beta x)u + \cos(\beta x)w\right)}_{=: z^*(x)} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow z'(x) = Az(x),\ \ {z^*}'(x) = Az^*(x)$

Ein komplexer Eigenwert liefert also **zwei** reelle Lösungen.

beachte :

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ Eigenwert},\ v \text{ Eigenvektor zu } \lambda \quad \Longrightarrow \quad \overline{\lambda} \text{ Eigenwert},\ \overline{v} \text{ Eigenvektor zu } \overline{\lambda}$$

für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $\lambda \neq \overline{\lambda}$, also v und $\overline{v}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$, d.h. Re v, Im v sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \quad z,\ z^*$ sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$ (der E.W. $\overline{\lambda}$ ergibt $-z,\ -z^*$ als reelle Lösungen!)

Satz 22.11 : *(Reeller Fall)*

Sei A **reelle** *$n \times n$ Matrix, $\lambda = \mu + iv$* **komplexer** *E.W., $v = a + ib \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger E.V. Dann sind*

$$(3) \quad \begin{cases} z(x) & = & Re\,(e^{\lambda x} v) & = & e^{\mu x}\Big(\cos \nu x \cdot a - \sin \nu x \cdot b\Big) \\ z^*(x) & = & Im\,(e^{\lambda x} v) & = & e^{\mu x}\Big(\sin \nu x \cdot a + \cos \nu x \cdot b\Big) \end{cases}$$

zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Lösungen von (1) mit Werten in $\mathbb{R}^n$.

□

Damit läßt sich die reelle Situation so beschreiben

Korollar : "es gibt genügend viele E.V."

Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $s_1, \ldots, s_q \in \mathbb{R}$. Seien $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{C}^n$ (n=2p+q) E.V.'en zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, und $d_1, \ldots, d_q$ E.V.'en zu $s_1, \ldots, s_q$. Sind dann die Vektoren $\mathrm{Re}\, v_1, \ldots$, $\mathrm{Re}\, v_p$, $\mathrm{Im}\, v_1, \ldots$, $\mathrm{Im}\, v_p$, $d_1, \ldots, d_q$ **linear unabhängig über** $\mathbb{R}$, so gewinnt man ein reelles Fundamentalsystem durch Benutzen von (3) (für v und λ) und (2) (für d und s).

Beispiel :

$$\begin{cases} y_1' & = & y_1 - 2y_2 \\ y_2' & = & 2y_1 - y_3 \\ y_3' & = & 4y_1 - 2y_2 - y_3 \end{cases} \quad , \quad \text{also}$$

$$y'(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} y(x)$$

$$P_A(\lambda) \quad = \quad \det\,(A - \lambda\,\mathrm{Id}) \;=\; (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2)$$

$$\text{Eigenwerte :} \qquad \underbrace{-\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{7}}_{=\,\lambda} \quad , \quad \underbrace{-\frac{1}{2} - i\,\frac{1}{2}\sqrt{7}}_{=\,\overline{\lambda}} \quad , \quad \underbrace{1}_{=\,s}$$

$$\text{Eigenvektoren :} \quad \underbrace{\Big(\frac{3}{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{7}, 2, 4\Big)}_{=v} \quad , \quad \underbrace{\Big(\frac{3}{2} - i\,\frac{1}{2}\sqrt{7}, 2, 4\Big)}_{=\,\overline{v}} \quad , \quad \underbrace{\Big(1, 0, 2\Big)}_{=\,d}$$

Lösungen dazu :

$$y(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z(x) = \mathrm{Re}(e^{\lambda x} v) = e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$z^*(x) = \mathrm{Im}(e^{\lambda x} v) = e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

weitere Beispiele $\longrightarrow$ Übungen !

Problem :

was macht man in Fällen, wo sich nicht genügend viele linear unabhängige E.V.'en ausrechnen lassen?

Beispiel :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad P_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$$

einziger E.W. -1 mit Vielfachheit 2, nur ein E.V., nämlich $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hier versagt offensichtlich das Korollar, und das ist immer der Fall, wenn

$$\dim(\text{Eigenraum zu } \lambda) < \text{Vielfachheit von } \lambda \text{ in } P_A.$$

1. Möglichkeit : "Jordan-Form"

Bringe A auf Jordan-Form und erhalte daraus Formeln für ein Fundamentalsystem ($\rightarrow$ Literatur).

2. Möglichkeit : "Exponentialfunktion für Matrizen"

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man setzt

$$\boxed{\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k},$$

wobei A^k das *k-fache Matrizenprodukt* bezeichnet. Wählen wir

$$\|A\| := \sup_{|v| \leq 1} |Av| \quad \text{(Operatornorm)},$$

so ist

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k,$$

woraus die Konvergenz der Reihe folgt.

Sodann rechnet man nach :

i) $e^A := \exp(A)$ ist immer regulär : $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

ii) $\exp\begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}$

iii) $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}, \quad s,\ t \in \mathbb{R}$

iv) $e^{A+s\,\mathrm{id}} = e^s e^A, \quad s \in \mathbb{R}$

v) $AB = BA \quad \Longrightarrow \quad e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

vi) S regulär $\quad \Longrightarrow \quad Se^A S^{-1} = \exp(SAS^{-1})$

vii) $\left.\begin{array}{l} A \text{ nilpotent, d.h.} \\ A^m = 0 \text{ für ein } m \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad e^A = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} A^k$

viii) $t \mapsto e^{tA}$ ist diffenzierbar mit

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA}}$$

Satz 22.12 :

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \eta_\circ \in \mathbb{R}^n$ und $t_\circ \in \mathbb{R}$.

Die **eindeutige Lösung** *des linearen Systems*

$$\begin{array}{rcl} y(t_\circ) & = & \eta_\circ \\ y'(t) & = & Ay(t),\ t \in \mathbb{R} \end{array}$$

ist

$$t \mapsto \quad \underbrace{\exp\Big((t-t_\circ)A\Big)}_{\textit{Matrix}}\ (\eta_\circ)$$

Beweis :

Eindeutigkeit klar! Nun zeige, dass diese Funktion das AWP löst.

Korollar :

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ein **Fundamentalsystem** zu $y' = A\,y$ wird gegeben durch

$$t \mapsto \exp(tA)e_i,\ i = 1,\dots,n,$$

wobei $\{e_i\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet (i.A. die kanonische Basis).

Beispiel :

A nilpotent, $A^m = 0$

$$\Longrightarrow \qquad t \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} t^k A^k(e_i),\ i = 1,\dots,n$$

ist Fundamentalsystem.

Bemerkung :

Die explizite Berechnung von e^{tA} ist i.a. nicht möglich; um zu verwertbaren Ergebnissen zu gelangen, ist man gezwungen, auf die Jordan'sche Normalform von A zurückzugehen $\quad(\longrightarrow$ Literatur!)

Lineare Gleichungen n$^{\text{ter}}$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(1) $\quad y^1(n) + a_{n-a}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1\,y' + a_\circ\,y = 0$

mit $a_\circ, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ für $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\Updownarrow$

$$(1)^* \quad Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & ldots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot Y \qquad \text{für } Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

beachte :

$$P_A(\lambda = (-1)^n \Big\{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_\circ\Big\} \quad (\underline{\text{Polynom über } \mathbb{C}})$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A ergibt sich als Koeffizientenpolynom der Gleichung (1). Durch Spezialisieren der allgemeinen Ergebnisse auf $(1)^*$ bekommt man

Satz 22.13 : *(Fundamentalsystem zu (1))*

i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von P_A mit Vielfachheit k. Dann sind die Funktionen $e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}$ linear unabhängige Lösungen von (1).

ii) Verfährt man gemäß(i) für die verschiedenen Nullstellen λ von P_A, so bekommt man ein komplexes Fundamentalsystem.

iii) Reeller Fall : Seien $a_\circ, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Ist $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ Nullstelle von P_A ($\Longrightarrow \overline{\lambda}$ ebenfalls Nullstelle), so spaltet man die Lösung aus (i) in Re und Im auf und erhält die 2^k reellen Funktionen

$$\boxed{x^q e^{\mu x} \cos(\nu x),\ x^q e^{\mu x} \sin(\nu x),\ q = 0, \ldots, k-1}$$

(Die zu $\overline{\lambda}$ gehörigen komplexen Lösungen liefern dieselben reellen Lösungen und bleiben deshalb unberücksichtigt!).
Ist α reelle Nullstelle mit Vielfachheit ℓ, so bekommt man daraus die Lösungen

$$\boxed{x^p\ e^{\alpha x},\ p = 0, \ldots, \ell - 1}\ .$$

Verfährt man so für alle Nullstellen, so ergibt sich ein reelles Fundamentalsystem.

Bemerkung :

Man kann 22.13 ohne Rückgriff auf Jordan-Formen direkt beweisen.

Beispiel :

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y'' + 8y' + 16y \equiv 0$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 \\ &= (\lambda+2)^3\,(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \\ &= (\lambda+2)^3\,(\lambda - 1 + i)\,(\lambda - 1 - i) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Fundamentalsystem : $e^{-2x},\ x \cdot e^{-2x},\ x^2 \cdot e^{-2x},\ e^x \cdot \sin x,\ e^x \cdot \cos x$

$\longrightarrow$ Übung : ausführliche Diskussion der "gedämpften Schwingungen"

$$y'' + 2ay' + by = 0,\ a,\ b \in \mathbb{R}$$

$\square$