Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie I (Kurventheorie) (SS 2013)
Blatt 1

Aufgabe 1. (3+3+2=8 Punkte)

Gegeben ist die Kurve

$$\alpha(t) : (-1,1) \to \mathbb{R}^2; \qquad \alpha(t) := \left(t^2, t\sqrt{1-t^2}\right).$$

a) Berechnen sie die Länge der Kurve α.

b) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve α nach Bogenlänge an.

c) Zeigen Sie $\lim\limits_{t\to+1} \alpha(t) = \lim\limits_{t\to-1} \alpha(t)$, d.h. die Kurve ist geschlossen. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{t\to\pm1} \alpha'(t)$ und deuten Sie das Ergenbis.

Aufgabe 2. (4+4=8 Punkte)

Parametrisieren Sie folgende Kurven nach Länge.

a) $\gamma(t) = e^{-t}\,(cost, \sin t, 1)\,, \quad t \in [0,\infty);$

b) $\delta(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t), \qquad t \in [0,\infty).$

Aufgabe 3. (2+2+2+4=10 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b < 0$. Betrachten Sie für $t \in \mathbb{R}$ die durch $r(t) = ae^{bt}$ in Polarkoordinaten gegebene Kurve $\alpha = \alpha(t) = r(t)\,(\cos t, \sin t)$ (*logarithmische Spirale*).

a) Skizzieren Sie α. Wie verändert sich r nach einer vollen Drehung?

b) Zeigen Sie: $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = (0,0) = \lim\limits_{t\to\infty} \alpha'(t)$.

c) Beweisen Sie, dass α auf jedem Intervall $[t_0,\infty)$ $(t_0 \in \mathbb{R})$ endlische Länge hat.

d) Sei $\vartheta(t) \in (0, \frac{\pi}{2})$ der Schnittwinkel zwischen $\alpha(t)$ und der Ursprungsgerade durch $\alpha(t)$ (Skizze!). Zeigen Sie:

$$\tan\vartheta(t) = \frac{1}{b} \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Abgabe: Ankündigung in der Vorlesung am 24.04.13