Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie I (Kurventheorie) (SS 2013)
Blatt 11

Aufgabe 11.1. (3+7=10 Punkte)

a) Gibt es eine einfach geschlossene ebene Kurve mit einer Länge von sechs Metern, welche eine Fläche von drei Quadratmetern umschließt?

b) Es seien $\overline{AB}$ eine Strecke in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und $l > |\overline{AB}|$. Beweisen Sie, dass eine Kurve der Länge l, welche die Punkte A und B verbindet und zusammen mit der Strecke $\overline{AB}$ den größtmöglichen Flächeninhalt einschlieẞst, ein kreisbogen von A nach B ist.

Aufgabe 11.2. (4+5=9 Punkte)

Sei $\alpha : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ $(L > 0)$ eine nach der Länge parametrisierte, einfach geschlossene und konvexe Kurve mit positiver Orientierung. Die Kurve $\beta : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\beta(s) := \alpha(s) - r n_\alpha(s),$$

mit einer Konstanten $r > 0$, heißt *Parallelkurve* zu α. Zeigen Sie:

a) $U(\beta) = U(\alpha) + 2\pi r$.

b) $A(\beta) = A(\alpha) + Lr + \pi r^2$.

Dabei bezeichnen $U(\alpha)$ den Umfang und $A(\alpha)$ den Inhalt des von der Kurve α umschlossenen Gebietes.

(Bitte wenden)

Aufgabe 11.3. (6 Punkte)

Es sei $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $(a, b \in \mathbb{R},\ a, b)$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, eine stetige differenzierbare Kurve mit positiver Orientierung und ohne Doppelpunkte (d.h. α ist injektiv).

Seien $A := \alpha(a)$ und $B := \alpha(b)$. Dann begrenzen die Spur von α und die Strecken $\overline{OA}$ und $\overline{BO}$ ein beschränktes Gebiet $S \subset \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass dessen Inhalt durch

$$A(S) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\, dt$$

gegeben ist.

(*Hinweis:* Parametrisieren Sie ∂S geeignet und wenden Sie den Diverenzsatz von Gauß an.

Bemerkung: Die Formel gilt auch, wenn ∂S lediglich stückweise stetig differenzierbar ist.)

Abgabe: Mittwoch, 17.07.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5.