Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie I (Kurventheorie) (SS 2013)
Blatt 3

Aufgabe 3.1. (3+2+2=7 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass sich die Tangente t einer beliebigen (nicht notwendig nach der Länge parametrisierten) regulären Kurven $\alpha = \alpha(u) : I \to \mathbb{R}^3$ durch

$$t = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}$$

berechnen lässt. Betrachten Sie dazu die nach Länge parametrisierte Kurve $\beta := \alpha \circ \varphi$.

b) Berechnen Sie die Tangente folgender Kurven $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

(i) $\alpha(t) = (6t, 3t^2, t^3)$

(ii) $\beta(t) = \left(\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}\right)$

Aufgabe 3.2. (3+3+3=9 Punkte)

a) Zeigen Sie: Für eine reguläre Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ gilt

(i) $\dfrac{d}{dt}\left(\alpha'|\alpha'|^{-1}\right) = \dfrac{\alpha''|\alpha'|^2 - \alpha'\left(\alpha' \cdot \alpha''\right)}{|\alpha'|^3}$

(ii) $|\left(\alpha' \times \alpha''\right) \times \alpha'|^2 = |\alpha' \times \alpha''|^2|\alpha'|^2$

b) Zeigen Sie mit Teil a) (i), dass eine Kurve der Form $\alpha(t) := f(t)\eta$ mit einer streng monotonen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einem konstanten Vektor $\eta \in \mathbb{R}^3$ eine konstante Tangente besitzt. Interpretieren Sie diese Aussage geometrisch.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3.3. (5+3=8 Punkte)

a) Berechnen Sie die Krümmung $\varkappa$ einer Ellipse

$$c(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

wobei $a, b > 0$ und $t \in [0, 2\pi)$.

b) In welchen Punkten wird die Krümmung maximal bzw. minimal? Diese Punkte nennt man **Scheitelpunkte**.

Abgabe: Mittwoch, 15.05.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5.