Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie I (Kurventheorie) (SS 2013)
Blatt 5

Aufgabe 5.1. (4+5+2=11 Punkte)

Betrachten Sie die Kurve $\alpha_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha_0(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\cos t \\ \exp\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\sin t \end{pmatrix}$$

a) Parametrisieren Sie α_0 nach der Länge.

b) Verifizieren Sie: Nach geeigneter Parametrisierung geht die Evolute β_0 von α_0 durch Streckung aus α_0 hervor:

$$\beta_0(t) = e^{\pi/2}\alpha_0(t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(Hier empfiehlt es sich mit der Kurve α_0 selbst, und nicht mit der umparametrisierten Kurve gem. a) zu arbeiten.)

c) Skizzieren Sie die Kurve und ihre Evolute für $t \in (-\infty, 0]$.

Zur Erinnerung: Die Evolute einer regulären Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) mit nullstellenfreier Krümmung $\varkappa$ und Normale n ist die Kurve $\beta : I \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\varkappa(t)}n(t).$$

Aufgabe 5.2. (3+5+5=13 Punkte)

Betrachten Sie für ein $r > 0$ die Raumkurve $\alpha : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = \frac{1}{5}\left(4r\cos t, 5r(1 - \sin t), -3r\cos t\right).$$

i) Parametrisieren Sie α nach der Länge.

ii) Bestimmen Sie das Frenet'sche Dreibein zu α.

iii) Zeigen Sie, dass die Spur von α in einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegt, und geben Sie eine Parametrisierung jener Ebene an. Wie sieht die Spur von α aus?

(Bitte wenden)

Aufgabe 5.3. (4 Punkte)

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine nach der Länge parametrisierte Kurve, deren Spur in einer Sphäre mit Radius $R > 0$ um den Punkt $\xi \in \mathbb{R}^3$ liegt. Zeigen Sie, dass für die Krümmung $\varkappa$ von γ gilt:

$$\varkappa(s) \neq 0 \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\varkappa(s)} = (\gamma(s) - \xi) \cdot n(s) \quad \text{für alle } s \in I,$$

wobei $n(s)$ den Normalenvektor von γ bei s bezeichnet.

Aufgabe 5.4. (2+4=6 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $\beta := \alpha \circ u$ die Umparametrisierung nach der Länge. Zeigen Sie

a) $u''(s) = -|\alpha'(u(s))|^{-4} \alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s))$

b) $\varkappa_\beta(s) = |\alpha'(u(s))|^{-3} |\alpha'(u(s)) \times \alpha''(u(s))|$.

Abgabe: Mittwoch, 05.06.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5.