Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Differentialgeometrie I (Kurventheorie) (SS 2013)
Blatt 6

Aufgabe 6.1. (3+3+3+5=14 Punkte)

Betrachtet werden Lösungen $y : I \to \mathbb{R}^n$ des linearen Systems

$$y' = Ay + b \tag{1}$$

mit einer diagonalisierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einer stetigen Funktion $b : I \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

a) Bei gegebenen Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ ist (1) eindeutig lösbar.

b) Seien $\eta_i \in \mathbb{R}^n$ die Eigenvektoren und λ_i $(i = 1, \dots, n)$ die zugehörige Eigenwerte der Matrix A. Dann ist
$$y_{hom}(x) := \sum_i^n c_i e^{\lambda_i x}\eta_i$$
mit $c_i \in \mathbb{R}$ Lösung des homogenen Systems (genauer sogar die allgemeine Lösung).

c) Seien $f_1, \dots, f_n$ Lösungen von
$$\sum_i^n f_i' e^{\lambda_i x}\eta_i = b,$$
so erhält man mit
$$y_{spez}(x) := \sum_i^n f_i e^{\lambda_i x}\eta_i$$
eine spezielle Lösung von (1). Die Funktion $y_* := y_{hom} + y_{spez}$ ist ebenfalls eine Lösung von (1) (genauer sogar die allgemeine Lösung).

d) Bestimmen Sie die Lösung von
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
mit den Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

(Bitte wenden)

Aufgabe 6.2. (4=4=8 Punkte)

Betrachten Sie die Gleichung

$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

für $y : I \to \mathbb{R}$ mit $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und einer Lipschitz-stetigen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die streng monoton ist. Zeigen Sie

a) (2) besitzt eine eindeutige Lösung. Diese ist durch

$$y(x) := G^{-1}\left(F(x) + c\right), \qquad c := G(y_0 - F(x_0))$$

gegeben. Dabei ist G eine Stammfunktion zu $\frac{1}{g}$ und F eine Stammfunktion zu f.

b) Lösen Sie die Gleichung

$$y' = -xy^2, \qquad y(2) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 6.3. (4+4=8 Punkte)

Bestimmen Sie die nach der Länge parametrisierte Kurven $\alpha(s)$, deren Krümmungsfunktion $\varkappa(s)$ wie folgt vorgegeben ist

$$a) \quad \varkappa(s) = \frac{1}{s+1}, \quad s \in [0, \infty) \qquad\qquad b) \quad \varkappa(s) = as, \quad s \in [0, \infty).$$

Nehmen Sie dazu die beiden Bedingungen $\alpha(0) = 0$ sowie $\alpha'(0) = (1, 0)$ an. Das Ergebnis von b), die *Klothoide*, ist für $a \neq 0$ nicht elementar integrierbar. Skizzieren Sie die Kurven.

Abgabe: Mittwoch, 12.06.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5.