Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie I (Kurventheorie) (SS 2013)
Blatt 8

Aufgabe 8.1. (8+4=12 Punkte)

a) Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varkappa : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Die parametrisierte Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(t) := \left(\int\limits_{t_0}^{t} \cos\left(\int\limits_{t_0}^{\tau} \varkappa(\sigma) d\sigma \right) d\tau, \int\limits_{t_0}^{t} \sin\left(\int\limits_{t_0}^{\tau} \varkappa(\sigma) d\sigma \right) d\tau \right) \qquad (t_0 \in I)$$

ist regulär und nach der Länge parametrisiert mit orientierter Krümmung $\varkappa$.

b) Bestimmen Sie eine nach der Länge parametrisierte Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(0) = (0,0)$, $\alpha'(0) = (1,0)$ und $\varkappa(t) = t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist α eindeutig bestimmt?

Aufgabe 8.2. (4+2+8=14 Punkte)

Eine einfach geschlossene reguläre und konvexe Kurve $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) mit nirgends verschwindender Krümmung heißt eine *Eilinie*.

a) Beweisen Sie, dass eine Eilinie α zu jedem Einheitsvektor e genau einen Parameter $s \in I$ mit $t_\alpha(s) = e$ besitzt.

b) Begründen Sie, dass α nach dem (die orientierung erhaltenden) Winkel $\vartheta(s) \in [0, 2\pi]$ zwischen dem Tangentenvektor $t_\alpha(s)$ und der x-Achse umparametrisiert werden kann. Diese Koordinaten heißen *tangentiale Polarkoordinaten*.

c) Es bezeichne β die gemäß (b) in tangentialen Polarkoordinaten parametrisierte Eilinie α. Die Kurve β heißt ein *Gleichdick*, falls für die *Stützfunktion* $h(\vartheta) := -\beta(\vartheta) \cdot n_\beta(\vartheta)$ gilt:

$$h(\vartheta) + h(\vartheta + \pi) = d \quad \text{für alle} \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

mit einer Konstanten $d > 0$. Zeigen Sie, dass ein Gleichdick der Breite d den Umfang πd hat.

(*Hinweis:* Stellen Sie β bzgl. des Zweibeins $(n_\beta, -n'_\beta)$ dar.)

Abgabe: Mittwoch, 26.06.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5.