Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya

Differentialgeometrie I (Kurventheorie) (SS 2013)
Blatt 9

Aufgabe 9.1. (2+4+4=10 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine nach der Länge parametrisierte ebene Kurve und sei $\alpha_s : I \to \mathbb{R}^2$ für $s > 0$ erklärt durch

$$\alpha_s(t) := \alpha(t) \pm sn(t),$$

wobei $n(t)$ die Normale von α bei t bezeichnet.

a) Wann ist α_s regulär? Wann ist α_s nach der Länge parametrisiert?

b) Drücken Sie im Fall, dass α_s regulär ist, die orientierte Krümmung $\varkappa_s$ von α_s durch die orientierte Krümmung $\varkappa$ von α aus.

c) Sei $I = \mathbb{R}$ und sei α periodisch mit periode $l \in (0, \infty)$. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{ds}\left(\int\limits_0^l |\alpha_s'(\tau)| d\tau\right)\Bigg|_{s=0} = \mp 2\pi I\left(\alpha\big|_{[0,l]}\right),$$

wobei $I\left(\alpha\big|_{[0,l]}\right)$ den Rotationsindex von $\alpha\big|_{[0,l]}$ bezeichnet.

Aufgabe 9.2. (2+3+5=10 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) := \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0); & t < 0 \\ (0,0,0); & t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}); & t > 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass α eine reguläre differenzierbare Kurve ist.

b) Beweisen Sie, dass die Krümmung $\varkappa$ von α nur für die Parameter $t \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$ verschwindet. Welche geometrische Bedeutung hat die Aussage $\varkappa(0) = 0$.

c) Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Schmiegebenen von α bei $t \searrow 0$ die Ebene mit der Gleichung $y = 0$ ist, während bei $t \nearrow 0$ die Ebene mit der Gleichung $z = 0$ approximiert wird. Was bedeutet dies für die Torsion?

Abgabe: Mittwoch, 03.07.13, vor der Vorlesung in dem Briefkasten in Gebäude E2 5.