Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Darya Apushkinskaya

Lokale und globale Flächentheorie (WS 2012/2013)
Blatt 3

Aufgabe 3.1 (5+5=10 Punkte)

Seien Ω und $\widetilde{\Omega}$ offene Menegen in $\mathbb{R}^2$, $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Fläche und $\varphi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ eine orientierungshaltende Parametertransformation. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der zweiten Fundameltalform, wo $\widetilde{\mathrm{II}}$ die zweite Fundameltalform der umparametrisierten Fläche $\widetilde{X} := X \circ \varphi$ bezeichnet.

(a) Für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \widetilde{\Omega}$ und alle $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\widetilde{\mathrm{II}}_{(\tilde{u},\tilde{v})} \left(\widetilde{U}, \widetilde{V}\right) = \mathrm{II}_{(\tilde{u},\tilde{v})} \left(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\widetilde{U}, D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\widetilde{V}\right).$$

(b) Für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \widetilde{\Omega}$ und alle $U, V \in T_{(\tilde{u},\tilde{v})}\widetilde{X}$ ist

$$\mathrm{II}^{T\widetilde{X}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V) = \mathrm{II}^{TX}_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V).$$

Aufgabe 3.2 (7+7=14 Punkte)

Bestimmen Sie zu folgenden Flächen X die Weingarten-Abbildung sowie die Hauptkrümmumgen (Eigenwerte der Weingarten-Abbildung) und Hauptkrümmungsrichtungen (Eigenvektoren). Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch und verdeutlichen Sie diese in einer Skizze.

(i) X ist ein senkrechter Kreiszylinder.

(ii) X ist ein senkrechter Kreiskegel mit Spitze im Ursprung.

(*Hinweis.* Nach einem Satz aus der Vorlesung ist das Bild des Differentials der Gauß-Abbildung einer Fläche in der Tangentialebene der Fläche enthalten.)

Aufgabe 3.3 (6 Punkte)

Seien $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) eine reguläre parametrisierte Fläche und $w \in \Omega$ fixiert. Zeigen Sie: Durch die Abbildung $\mathrm{III}_w : T_wX \times T_wX \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{III}_w\,(U, V) := S_w\,(U) \cdot S_w\,(V)\,,$$

wird eine symmetrische Bilinearform erklärt, die sog. *dritte Fundamentalform*, und es besteht die Beziehung

$$\mathrm{III}_w - (k_1(w) + k_2(w))\,\mathrm{II}_w + k_1(w)k_2(w)\mathrm{I}_w \equiv 0.$$

Darin bezeichnen $k_{1,2}(w)$ die Hauptkrümmungen (Eigenwerte der Weingarten-Abbildung S_w im Parameterpunkt w) von X bei w.

Abgabe: Freitag 30.11.12