Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Darya Apushkinskaya

Lokale und globale Flächentheorie (WS 2012/2013)
Blatt 4

Aufgabe 4.1 (1+5+2+4=12 Punkte)

Eine Abbildung $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) der Gestalt

$$X(u,v) := \alpha(u) + vw(u),$$

wobei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $w : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ glatt ist, heißt eine *Regelfläche*, falls X regulär ist. Die Kurve α wird dabei die *Leitkurve* und die Geraden $v \mapsto \alpha(u) + vw(u)$ ($u \in I$ fest) werden die *Regelgeraden* genannt.

(a) Unter welchen Bedingungen ist X eine parametrisierte Fläche?

(b) Zeigen Sie, dass die Tangentialebene von X in einem Punkt $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$ (sofern diese existiert) genau dann unabhängig von v ist, wenn die Vektoren $\alpha'(u)$, $w'(u)$ und $w(u)$ linear abhängig sind.

(c) Zeigen Sie, dass das hyperbolische Paraboloid eine Regelfläche ist.

(d) Untersuchen Sie, bei welchen der folgenden Regelflächen die Tangentialebene (wo sie existiert) unabhängig vom Parameter v ist und erläutern Sie anhand einer Skizze, was dies geometrisch bedeutet.

  (i) X ist ein (verallgemeinerter) Kegel mit Spitze in $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{spur}\alpha$, d.h. es ist $w(u) = P - \alpha(u)$;

  (ii) X ist ein (verallgemeinerter) Zylinder, d.h. w ist konstant;

  (iii) X ist das hyperbolische Paraboloid aus Teil c).

Aufgabe 4.2 (3+2+5=10 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass für eine parametrisierte Fläche stets $K \leqslant H^2$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Hauptkrümmungen (Eigenwerte der Weingarten-Abbildung) $k_{1,2}$ einer parametrisierten Fläche gemäß der Formel

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

berechnen lassen.

(c) Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen (Eigenwerte der Weingarten-Abbildung) eines Kreistorus.

Aufgabe 4.3 (1+4+7=12 Punkte)

Gegeben sei eine Fläche $X : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) der Form

$$X(u, v) = (h(u)\cos(v), h(u)\sin(v), k(u)),$$

wobei $h : I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k : I \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit $h'^2 + k'^2 \equiv 1$ seien.

(a) Was bedeutet die Bedingung $h'^2 + k'^2 \equiv 1$ geometrisch? Stellt diese Bedingung eine Einschränkung dar?

(b) Bestimmen Sie die Weingarten-Abblidung zu X. Berechnen Sie die Hauprkrümmungen (Eigenwerte der Weingarten-Abbildung) und zeigen Sie, dass für die Gauß-Krümmung K von X gilt:

$$K = -\frac{h''}{h}.$$

(c) Charakterisieren Sie die Fläche in den Fällen $K \equiv 0$ und $K \equiv 1$.

Abgabe: Freitag 07.12.12