**Universität des Saarlandes**
**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Darya Apushkinskaya

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

**Lokale und globale Flächentheorie (WS 2012/2013)**
**Blatt 5**

---

### Aufgabe 5.1 ( 5+5=10 Punkte)

Betrachten Sie die durch die Vorschrift $X : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = \left((1 + v\cos\frac{u}{2})\cos u, (1 + v\cos\frac{u}{2})\sin u, v\sin\frac{u}{2}\right),$$

definierte parametrisierte Fläche (*Möbiusband*).

a) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung von $X$ sowie deren Grenzlagen bei $u \to 0$ und $u \to 2\pi$. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

b) Zeigen Sie, dass für die Gauß-Krümmung $K$ gilt:

$$K = -\left(\frac{2}{v^2 + 4(1 + v\cos\frac{u}{2})^2}\right)^2.$$

### Aufgabe 5.2 ( 4+4+2=10 Punkte)

Betrachten Sie die durch $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (av\cos u, av\sin u, bu),$$

mit $a, b > 0$, erklärte *Wendelfläche (Helikoid)*.

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Regelfläche (vgl. Aufgabe 4.1) handelt. Sind die Regelgeraden Asymptotenlinien?

(*Hinweis:* Eine Kurve $\gamma = X \circ \omega$ auf der Fläche heißt Asymptotenlinie, falls die Normalkrümmung $k_n$ verschwindet. ($\Leftrightarrow n(s) \perp N(\omega(s))$).

b) Bestimmen Sie die Krümmungslinien der Fläche.

(*Hinweis:* Eine Kurve $\gamma = X \circ \omega$ heißt Krümmungslinie auf $X$, falls jeder Tangentenvektor $\gamma'(t)$ eine Hauptkrümmungsrichtung ist.)

c) Zeigen Sie, dass $X$ eine Minimalfläche ist, d.h. $H \equiv 0$.

(*Bemerkung.* Man kann zeigen, dass die Wendelfläche im wesentlichen die einzige nicht ebene- und damit die einzige nichttriviale - Regelfläche ist, die gleichzeitig eine Minimalfläche ist.)

**Aufgabe 5.3 (2+3+2+1+2=10 Punkte)**

Betrachten Sie für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und für eine Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ die Abbildung $X : I \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ h(u) \end{pmatrix}.$$

(i) Handelt es sich um eine reguläre Fläche? Fertigen Sie eine Skizze im Fall $I = \mathbb{R}$ und $h : u \mapsto u^3$ an.

(ii) Es sei nun $I = (1/2, 2)$. Für welche Funktionen $h$ verschwindet die Gaußsche Krümmung der Fläche identisch, für welche sowohl die Gaußsche als auch die mittlere Krümmung?

(iii) Im Folgenden sei $h(u) = u$ auf $(1/2, 2)$ und $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ($\varepsilon > 0$ hinreichend klein) eine Funktion mit $g(0) = 0$ und

$$g'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + g^2(s)/2}} \quad \text{für alle} \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Die Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4}g^2(s) \\ \\ g(s) \\ \\ 1 + \frac{1}{4}g^2(s) \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(0)$ und die Normale $n(0)$ and die Kurve $\alpha$ in $s = 0$.

(b) Ist $\alpha$ eine Kurve auf der Fläche $X$?

(c) In $u_0 = 1$ und $v_0 = 0$ sei $N_0$ "die"Normale an die Fläche $X$. Zeigen Sie, dass die Kurve $\alpha$ in der Ebene

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda N_0 + \mu\alpha'(0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

verläuft. Berechnen Sie die Normalkrümmung von $\alpha$ in $s = 0$.

**Abgabe:** Freitag 14.12.12