Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Darya Apushkinskaya

Lokale und globale Flächentheorie (WS 2012/2013)
Blatt 7

Aufgabe 7.1 (2+3x4=14 Punkte)

Gegeben sei eine zweidimensionale Fläche X im $\mathbb{R}^3$ der Form

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u) \end{pmatrix}, \quad -\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty.$$

a) Skizzieren Sie die Fläche im Fall $f(u) = \cosh(u)$.

b) Bestimmen Sie die Torsion der Kurve $\alpha(t)$,

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < \infty,$$

auf der Fläche.

c) Finden Sie

   (i) eine Krümmungslinie,

   (ii) eine Asymptotenlinie,

   (iii) eine Geodätische

   auf der Fläche.

d) Finden Sie eine Funktion f, sodass sowohl die Gaußsche als auch die mittlere Krümmung verschwinden.

e) Es bezeichne dN_p das Differential der Gauß-Abbildung im Punkt p auf der Fläche. Berechnen Sie

$$dN_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'(0) \end{pmatrix}, \qquad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(0) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7.2 (2+3+3+4=12 Punkte)

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} v \\ (v^3-1)\sin(u) \\ (v^3-1)\cos(u) \end{pmatrix}, \qquad -\pi < u < \pi, -1 < v < 1.$$

a) Skizzieren Sie die Fläche.

b) Berechnen Sie die Gaußsche Krümmung der Fläche.

c) Finden Sie eine Kurve $c : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}^3$ auf der Fläche, die durch den Punkt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

verläuft und deren Tangentenvektor dort mit dem Tangentialvektor $X_u + X_v$ übereinstimmt.

d) Es sei $w = (u,v)$ fixiert und $\{e_1, e_2\}$ bezeichne die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie zunächst $DX_w(e_1)$ und berechnen Sie dann das Bild von X_u unter der Weingartenabbildung $S : T_wX \to T_wX$, $S = -DN_w \circ (DX_w)^{-1}$.

Abgabe: Freitag 25.01.13