UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 — MATHEMATIK
Dr. Dominic Breit

Mathematische Grundlagen der Fluid Mechanik (WS 2010/11)
Blatt 2

Aufgabe 5.

Es sei $u : \mathbb{R}^d \supset B_1 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^s} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0. \end{cases}$$

mit $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

a) Ist $s < d$, so ist $u \in L^1(B_1)$.

b) Ist $s < d-1$, so ist $u \in W^{1,1}(B_1)$.

Aufgabe 6.

Zeigen Sie

a) Ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$, so gilt für alle $\gamma \in \{1, ..., d\}$

$$\|\Delta_h^\gamma u\|_{p,\omega} \leq \|\partial_\gamma u\|_{p,\omega^{|h|}}$$

für alle $\omega \Subset \Omega$ mit $\omega^{|h|} \subset \Omega$.
(Hinweis: approximieren sie u zunächast durch glatte Funktionen.)

b) Sei $u \in L^1(\Omega)$. Es existiere eine Folge $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$ mit

$$u_m \longrightarrow u, \quad \nabla u_m \longrightarrow W, \quad m \to \infty$$

in L^1 mit einer Funktion $W \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Dann ist u schwach differenzierbar mit schwachem Gradient W.

Aufgabe 7.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie

a) Für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ist

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Benutzen Sie dabei die Darsetllung

$$u(x) = u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2)\, dt = \int_{-\infty}^{x_2} \partial_2 u(x_1, t)\, dt.$$

b) Die Ungleichung aus a) gilt für alle $u \in \mathring{W}^{1,1}(\Omega)$.

Aufgabe 8.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand sowie $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie die Poincaré-Ungleichung: Für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt

$$\|u - (u)_\Omega\|_p \leq c(\Omega)\, \|\nabla u\|_p\,,$$

wobei $(u)_\Omega$ der Mittelwert von u über Ω ist.
(Hinweis: Betrachten Sie zunächst Funktionen mit Mittelwert 0. Argumentieren Sie dann indirekt mit einer Folge $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\|u_k\|_p \geq k\, \|\nabla u_k\|_p$ und normieren Sie diese.)
