Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs

Funktionenräume (SoSe 2013)
Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Beweisen Sie:

(a) Auf dem Raum $C^k(\overline{\Omega})$ wird eine Norm erklärt durch die Vorschrift

$$||u|| := \begin{cases} \sum\limits_{\nu \in \mathbb{N}_0^n, ||\nu|| \le k} ||\partial^\nu u||_\infty, & k \in \mathbb{N}_0 \\ \max\limits_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} ||\partial^\nu u||_\infty, & k = \infty \end{cases}.$$

Dabei bezeichnet $||.||_\infty$ wie üblich die Maximumnorm.

(b) Der Raum $C^k(\overline{\Omega})$ ist bzgl. der unter (a) definierten Norm ein Banach-Raum.

(*Hinweis zu (b):* Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_m) \subset C^1(\Omega)$ eine Folge mit

$$u_m \xrightarrow{m \to \infty} u \quad \text{und} \quad \partial_\alpha u_m \xrightarrow{m \to \infty} v$$

gleichmäßig in Ω für ein $\alpha \in \{1, \dots, n\}$, so existiert $\partial_\alpha u$, und es ist $v = \partial_\alpha u$.)

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\eta(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

beliebig oft differenzierbar ist und Träger in $\overline{B}_1(0)$ hat. Zeigen Sie zudem die Existenz einer Konstante $c > 0$ mit $c \int\limits_{R^n} \eta dx = 1$.

(b) Konstruieren Sie eine Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{spt} \eta \Subset I$, d.h. $\overline{\operatorname{spt} \eta} \subset I$, wobei I ein beschränktes Intervall ist.

(*Hinweis zu (a):* Betrachten Sie die Funktion $(0, \infty) \ni t \mapsto \exp(\frac{1}{t})$.)

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $l^2(\mathbb{N})$ auf Beschränktheit und Kompaktheit.

(a) $A := \left\{ u \in l^2(\mathbb{N}) : \, |u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$.

(b) $B : \left\{ u \in l^2(\mathbb{N}) : \, ||u||_2 \leq 1 \right\}$.

(c) $C := \left\{ u \in l^2(\mathbb{N}) : \, |u_n| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 4

Seien (X, μ) ein Maßraum und $\mu(X) < \infty$. Zeigen Sie: Für alle Exponenten p, q mit $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ist $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$. In diesem Fall gilt:

$$||u||_p \leq ||u||_q \mu(X)^{1/p - 1/q} \text{ für alle } u \in L^p(X, \mu).$$

Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Inklusion $L^q \subset L^p$ im Fall $\mu(X) = \infty$ allgemein falsch ist.

Abgabe: keine