Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs

Funktionenräume (SoSe 2013)
Blatt 3

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie:

(a) Sind $p, q \in (0, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt:

$$ab \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-q/p} b^q$$

für alle $a, b \in [0, \infty)$ und alle $\varepsilon > 0$.

(b) Sind $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$ mit $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}$ für ein $\theta \in [0, 1]$, so gilt:

$$||u||_q \leq ||u||_p^{\theta} ||u||_r^{1-\theta}$$

für alle $u \in L^r(\Omega)$. (Konvention: $\frac{1}{\infty} := 0$.)

(c) Mit den Vereinbarungen aus (b) ist für alle $u \in L^r(\Omega)$ und alle $\varepsilon > 0$

$$||u||_q \leq \varepsilon ||u||_r + \varepsilon^{-\mu} ||u||_p,$$

wobei $\mu := (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})/(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})$ ist.

Aufgabe 2

Sei $(X, ||.||)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass die Gültigkeit des Parallelogrammgesetzes notwendig und hinreichend dafür ist, dass X ein Prä-Hilbert-Raum ist.
(*Hinweis:* Betrachten Sie $\frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2)$ für $x, y \in X$.)

Aufgabe 3

(a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nichtleere, konvexe und abgeschlossenen Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es Elemente $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\nu \in S^{n-1}$ gibt, so dass

$$(x - \xi) \cdot \nu \geq 0$$

für $x \in A$ und

$$(x - \xi) \cdot \nu \leq 0$$

für $x \in B$ gilt.

(b) Beweisen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so gibt es zu $\xi \in \partial\Omega$ einen Vektor $\nu \in S^{n-1}$, so dass $(x - \xi) \cdot \nu \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ ist.

(*Hinweise:* Wenden Sie in (a) auf die Mengen $A_m := A \cap \overline{B_m(0)}$ sowie $B_m := B \cap \overline{B_m(0)}$ mit $m \in \mathbb{N}$ das abstrakte Variationsprinzip an. Betrachten Sie in (b) eine gegen ξ konvergente Folge in $\mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$.)

Abgabe: freiwillig bis Freitag, den 21.06. um 8:30 Uhr in den Übungen