Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs

Funktionenräume (SoSe 2013)
Blatt 3

Aufgabe 1

Seien $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $\beta : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Zeigen Sie:

(a) Durch die Vorschrift

$$||(x,y)|| := \sqrt{||x||^2 + ||y||^2} \quad ((x,y) \in X \times X)$$

wird eine Norm auf $X \times X$ erklärt.

(b) Ist $X \times X$ mit der Norm aus (a) versehen und ist β stetig (im Sinne von $||\beta|| < \infty$), so ist β stetig (im Sinne von Abbildungen) auf $X \times X$.

(c) β ist genau dann stetig (im Sinne von $||\beta|| < \infty$) und koerziv, wenn es positive Konstanten λ und Λ gibt, so dass gilt:

$$|\beta(x,y)| \leq \Lambda ||x|| ||y|| \quad \text{und} \quad \beta(x,x) \geq \lambda ||x||^2$$

für alle $x, y \in X$.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass im $\mathbb{R}^n$ schwache und starke Konvergenz äquivalent sind.

(b) Betrachten Sie dioe Folge $(x_n) \subset l^2(\mathbb{N})$, gegeben durch

$$x_n^k := \begin{cases} \frac{1}{\log(n+1)}, & k \in \{1, \ldots, n+1\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Was kann man über die komponentenweise, schwache und starke Konvergenz von (x_n) sagen?

Aufgabe 3

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p \leq \infty$ und $u, v \in L^p(\Omega)$ sowie $(u_m) \subset L^p(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie: Ist $p < \infty$ und strebt $u_m \overset{m}{\to} u$ punktweise f.ü. in Ω sowie $||u_m||_p \overset{m}{\to} ||u||_p$, so strebt bereits $u_m \overset{m}{\to} u$ in $L^p(\Omega)$.
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktionen $2^p(|u|^p + |u_m|^p) - |u - u_m|^p$ und wenden Sie das Lemma von Fatou an.)

(b) Ist $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$ und strebt $u_m \rightharpoonup u$ für $m \to \infty$ in $L^p(\Omega)$ sowie $u_m \overset{m}{\longrightarrow} v$ punktweise f.ü. in Ω, so ist $u = v$ f.ü. in Ω.
(*Hinweis:* Strebt $u_m \overset{m}{\longrightarrow} v$ punktweise f.ü. in Ω, so gibt es nach dem Satz von Egoroff zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $E_\varepsilon \subset \Omega$ mit $\mathcal{L}^n(\Omega - E_\varepsilon) < \varepsilon$, so dass $u_m \overset{m}{\longrightarrow} v$ gleichmäßig in E_ε strebt.)

Abgabe: freiwillig bis Freitag, den 05.07. um 8:30 Uhr in den Übungen