Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs

Funktionenräume (SoSe 2013)
Blatt 5

Aufgabe 1

Sei X ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) $\dim X = \dim X^*$.

(b) X ist reflexiv.

Aufgabe 2

Seien $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ $(n \in \mathbb{N})$ Banach-Räume, $U \subset X$ ein Unterraum und $I : X \to Y$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie:

(i) Ist X reflexiv und U abgeschlossen, so ist auch U reflexiv.

(ii) X ist reflexiv genau dann, wenn Y reflexiv ist.

(iii) X ist genau dann reflexiv,wenn X^* reflexiv ist.

(iv) Sind $X_1, \ldots, X_n$ reflexiv, so auch $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass jeder reflexive Raum X schwach kompakt, i.e.: Jede beschränkte Folge in X besitzt eine in X schwach konvergente Teilfolge,
(*Hinweis:* Betrachten Sie zunächst den Fall, dass X^* separabel ist. Ist X^* nicht separabel, so betrachten Sie für eine Folge $(\varphi_n) \subset X^*$ die Menge $U := \operatorname{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.)

Aufgabe 4

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. u heißt schwach differenzierbar in Ω, wenn es Funktionen $w_1, \ldots, w_n \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gibt, so dass für $w := (w_1, \ldots, w_n)$ gilt:

$$\int\limits_\Omega w \cdot \eta dx = -\int\limits_\Omega u \operatorname{div} \eta dx$$

für alle $\eta \in C^1_0(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
Zeigen Sie:

(i) Die schwache Ableitung von u ist, sofern sie existiert, eindeutig bestimmt.

(ii) Ist $u \in C^1(\Omega)$, so ist u schwach differenzierbar in Ω, wobei die klassische Ableitung die schwache Ableitung erzeugt.

Abgabe: freiwillig bis Freitag, den 19.07. um 8:30 Uhr in den Übungen