Aufgabe 1 **((1+1+1,5)+2,5+(1+1,5+1,5)=10 Punkte)**

(a) Es seien A und B zwei Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Für $X \subset A$ und $Y \subset B$ definieren wir

$$f(X) = \{f(x);\ x \in X\} \quad \text{und} \quad f^U(Y) := \{x \in A;\ f(x) \in Y\}.$$

Seien $C, D \subset A$ und $E, F \subset B$. Zeigen Sie:

(i) $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$.

(ii) Die umgekehrte Inklusion aus Teil (i) gilt nicht. Betrachten Sie dazu die Mengen $A = \{0, 1\}$ und $B = \{2013\}$ sowie die Funktion $f : A \to B$ mit $f(0) = f(1) = 2013$.

(iii) $f^U(E \cap F) = f^U(E) \cap f^U(F)$.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

(c) Kevin muss in der Klausur zur höheren Mathematik für Ingenieure 8 von 10 Aufgaben lösen. Wieviele Auswahlmöglichkeiten hat er

(i) insgesamt?

(ii) wenn er genau eine der ersten beiden Aufgaben lösen muss?

(iii) wenn er mindestens 4 der ersten 6 Aufgaben lösen muss?

Aufgabe 2 **(2+1,5+2,5+4=10 Punkte)**

(a) Geben Sie die folgende Menge reeller Zahlen in Form eines Intervalls (oder einer Vereinigung solcher) an:

$$\{x \in \mathbb{R};\ 5 - 3|x - 6| \leq 3x - 7\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht streng monoton sein kann.

(c) Der Tangens Hyperbolicus ist gegeben durch $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

(d) Gegeben sei die Wertetabelle

j	0	1	2	3
x_j	0	1	4	9
y_j	0	1	2	3

Berechnen Sie mit der Newtonschen Methode das Interpolationspolynom $p_3(x)$ zu den Stützstellen x_j mit den Werten y_j, wobei $j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Aufgabe 3 **(2+1+(1+1+1)+4=10 Punkte)**

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung gegebenen Definition einer konvergenten Folge, dass die Folge $\left\{\frac{1-3n}{4n+2}\right\}$ konvergiert.

(b) Entscheiden Sie, ob der folgende Grenzwert existiert, und berechnen Sie ihn gegebenenfalls:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3 + \frac{2}{n}}{\frac{1}{2}n^3 + n^2 - 5}.$$

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{-1 + k^5}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2}{n\sqrt{n}} - \frac{3}{\sqrt{n}}\right)$.

(d) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(x-2)^n$$

konvergiert.

Aufgabe 4 **(1+2+3+1+(1+1+1)=10 Punkte)**

Betrachten Sie im $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$\underline{\boldsymbol{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den Unterraum $V = \{\underline{\boldsymbol{N}}\}^\perp$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\boldsymbol{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in V liegen.

(b) Sind $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$, $\underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}$ und $\underline{\boldsymbol{v}}^{(3)}$ linear unabhängig? Bestimmen Sie die Dimension von V.

(c) Konstruieren Sie aus $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$ und $\underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}$ nach dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis $\{\underline{\boldsymbol{w}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{w}}^{(2)}\}$ von V.

(d) Ergänzen Sie $\{\underline{\boldsymbol{w}}^{(1)}, \underline{\boldsymbol{w}}^{(2)}\}$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

(e) Sei E die Ebene, die von $\underline{\boldsymbol{v}}^{(1)}$ und $\underline{\boldsymbol{v}}^{(2)}$ aufgespannt wird und den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

   (i) Geben Sie eine Parameterdarstellung von E an.

   (ii) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E.

   (iii) Ist E ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$?

Viel Erfolg!