Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
Dr. Dominic Breit

Saarbrücken, 15.02.2011

Klausur zur Vorlesung HMI I

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Vollständige Induktion, Kombinatorik; 2.5+2.5+1+1.5+2.5 Punkte)

i) Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \, .$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{2}{j^2 - 1} = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{n(n+1)} \, .$$

ii) Betrachten Sie zu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ein Rennen mit n nummerierten Läufern.

(a) Wie viele mögliche Rennergebnisse gibt es insgesamt?

(b) Bei wie vielen möglichen Rennergebnissen belegt der Läufer mit der Nr. 1 den ersten Platz vor dem Läufer mit der Nr. 2 auf dem zweiten Platz?

(c) Wann ist die Anzahl der möglichen Rennergebnisse in den folgenden beiden Szenarien gleich?

- Der Läufer mit der Nr. 1 gewinnt.
- Die Läufer mit den Nummern 1 und 2 teilen sich die ersten beiden Plätze.

Bitte wenden.

Aufgabe 2. (Folgen, Reihen, Potenzreihen; **1+1+1+2+2+1.5+1.5 Punkte**)

i) Existieren die folgenden Grenzwerte und wenn ja, berechnen Sie diese:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \frac{1}{n} + n}{2n^4 + \sqrt{n}}\ , \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \frac{1}{n} + n}{2n^3 + \sqrt{n}}\ , \qquad \text{(c)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \frac{1}{n} + n}{2n^2 + \sqrt{n}}\ .$$

ii) Betrachten Sie die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$,

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\ .$$

Finden Sie ein $a \in \mathbb{R}$ und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

iii) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big((-1)^n + \frac{1}{n}\Big)\ ?$$

iv) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Potenzreihen

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-1)^n\ , \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-1)^n\ ?$$

Aufgabe 3. (Polynominterpolation, Topologie des $\mathbb{R}^n$, komplexe Zahlen; **5+2+3 Punkte**)

i) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_2 zunächst mithilfe der Lagrangeschen und dann mithilfe der Newtonschen Darstellung zu den Daten:

j	0	1	2
x_j	0	2	3
y_j	3	0	1

.

ii) Zeigen Sie: Die Vereinigung $U \cup V$ zweier offener Mengen U, V im $\mathbb{R}^n$ ist offen.

iii) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = i - 1$ und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 4. (Vektorrechnung; **4.5+4.5+1 Punkte**)

i) Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ fixiert. Betrachten Sie im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad \underline{\mathbf{u}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(2)})$ und von $\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(3)})$. Bestimmen Sie im Fall $a = 2$ die Dimension von $\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(2)}, \underline{\mathbf{u}}^{(3)})$.

ii) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^4$ den Vektor

$$\underline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den Unterraum $V = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 : \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{N}} \rangle = 0\}$ des $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

(b) Bestimmen Sie $V^{\perp}$.