Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
B.Sc. Christian Tietz

Saarbrücken, 04.04.2011

Klausur zur Vorlesung HMI I

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Ausnahmen: Aufgabe 1, i), Aufgabe 4, i). Hier sind nur die Tabellen auszufüllen (ohne weitere Begründungen).

Aufgabe 1. (Mengenalgebra, vollständige Induktion, Kombinatorik; **3+2.5+2.5+2 Punkte**)

i) Es seien A, B, C beliebige Mengen. Dann gilt (bitte nur richtig oder falsch ankreuzen)

	richtig	falsch
$\big(A \cap (B \cup C)\big) = \big((A \cap B) \cup (A \cap C)\big)$	$\otimes$	
$\big(A \cap (B \cup C)\big) = \big(A \cup (B \cap C)\big)$		$\otimes$
$\big(A \cup (B \cap C)\big) \subset \big((A \cup B) \cap (A \cup C)\big)$	$\otimes$	
$\big(A \cup (B \cap C)\big) \supset \big((A \cup B) \cap (A \cup C)\big)$	$\otimes$	
$x \in \big(A \cup (B \cap C)\big) \setminus (B \cap A) \Rightarrow x \in A \cup C$	$\otimes$	
$x \in \big(A \cup (B \cap C)\big) \setminus (B \cap A) \Rightarrow x \in B \cup C$		$\otimes$

ii) Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \ .$$

Bitte wenden.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, gilt

$$\sum_{j=3}^{n} \frac{2}{j^2 - 2j} = \frac{3}{2} - \frac{2n-1}{n(n-1)} .$$

iii) Zwei Ehepaare nehmen an einem runden Tisch mit vier Stühlen Platz. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt und bei wie vielen Möglichkeiten sitzen beide Ehepaare jeweils nebeneinander?

Aufgabe 2. (Folgen, Reihen, Potenzreihen; **1+1.5+3+2+1.5+1 Punkte**)

i) Existieren die folgenden Grenzwerte und wenn ja, berechnen Sie diese:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \frac{2}{n} + n}{\sqrt{n}n^2 + n} , \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + \sqrt{n}} - \frac{2^n}{n!} \right) .$$

ii) Betrachten Sie die rekursiv definierte reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$,

$$a_1 = 1 , \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} , \qquad n = 1,\ 2, \ldots .$$

Ist die Folge monoton wachsend oder fallend, ist sie beschränkt, konvergiert sie, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

iii) Fixiert sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + k^{3+\alpha}} \ ?$$

iv) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Potenzreihen

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n , \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ ?$$

Aufgabe 3. (Polynominterpolation, Topologie des $\mathbb{R}^n$, komplexe Zahlen; **3+2+2+1 +1+1 Punkte**)

i) (a) Es sei $p_2(x)$ das Interpolationspolynom p_2 vom Grad kleiner oder gleich 2 zu den folgenden Daten:

j	0	1	2
x_j	0	2	3
y_j	3	0	1

Berechnen Sie $p_2(-1)$ mittels des Algorithmus von Neville.

(b) Fügen Sie der Wertetabelle den Punkt $(x_3, y_3) = (4, 1)$ hinzu, und bearbeiten Sie die Aufgabe erneut (d.h. berechnen Sie $p_3(-1)$ mittels des Algorithmus von Neville).

ii) Zeigen Sie: Der Durchschnitt $U \cap V$ zweier abgeschlossener Mengen U, V im $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen.

iii) Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene

$$\text{(a)} \quad z = \frac{1}{1+2i} , \qquad \text{(b)} \quad z = (1+i)e^{i\pi/4} , \qquad \text{(b)} \quad z = e^{i\pi/3}\, \overline{e^{i\pi/3}} .$$

Aufgabe 4. (Vektorrechnung; **3+4.5+2.5 Punkte**)

i) Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (bitte nur richtig oder falsch ankreuzen)?

Vektorraum?	richtig	falsch
$\left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ \underline{\mathbf{x}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \lambda, \ \mu \in \mathbb{R} \right\}$	$\otimes$	
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - 2x_2 = 0\}$	$\otimes$	
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 0\}$		$\otimes$
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3^2 = 0\}^\perp$	$\otimes$	
$\left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \right\}$		$\otimes$
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \|\underline{\mathbf{x}}\| = 0\}$	$\otimes$	

ii) (a) Betrachten Sie den Unterraum

$$V = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

(b) Ergänzen Sie die Orthonormalbasis von V aus *ii)*, (a), zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ und stellen Sie den kanonischen Einheitsvektor $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.