Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
Dr. Dominic Breit

Saarbrücken, 20.07.2010

Klausur Höhere Mathematik für Ingenieure IV a
Klausur Höhere Mathematik für Ingenieure IV a plus IV b, Teil 1

Die folgende Klausur besteht aus 3 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso das Themengebiet, aus dem die Aufgabe gewählt wurde.

Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Notation in $\mathbb{C}$: $z = x + iy$, $f = u + iv$ und zu fixiertem $0 < r \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\kappa_r(z_0)$ die Parametrisierung der Kreislinie $\kappa_r(z_0)(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$, $A_{r_1,r_2}(z_0)$ ist zu fixierten $0 \le r_1 < r_2$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

Aufgabe 1. (holomorphe Funktionen; Kurvenintegrale; Singularitäten; **3+3.5+3.5 Punkte**)

i) Welche der folgenden Funktionen sind holomorph auf $\mathbb{C}$:

(a) $f(z) = z^3 \cos(z^2)$;

(b) $f(z) = \exp(z\overline{z})$;

(c) $f(z) = \mathrm{Re}\,(\cos(z)) + i\mathrm{Im}\,(\cosh(iz))$?

ii) Für welches fixierte $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$u(x, y) = ay^3 - yx^2$$

Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$? Geben Sie, falls existent, den zugehörigen Imaginärteil der holomorphen Funktion an.

bitte wenden

iii) Charakterisieren Sie jeweils alle (isolierten) Singularitäten von:

$$\text{(a) } f(z) = \frac{2}{(z-1+i)^2}; \quad \text{(b) } f(z) = \frac{\sin(1/z)}{z}; \quad \text{(c) } f(z) = \frac{\exp(z+i)-1}{z^2+1}.$$

Aufgabe 2. (Residuen; Laurent-Reihen; Cauchysche Integralformel; **1+2+2+3+2 Punkte**)

i) Es sei

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1+i-z}\ .$$

(a) Finden Sie Konstanten A, $B \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+i-z}\ .$$

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f in allen Singularitäten.

(c) Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für

i. $\gamma = \kappa_{1/2}(0)$;

ii. $\gamma = \kappa_{11/10}(0)$;

iii. $\gamma = \kappa_2(0)$.

ii) Es sei $f(z) = \frac{1}{z-1}$. Berechnen Sie die Laurent-Reihe von f **um den Entwicklungspunkt $\mathbf{z_0 = 0}$** auf $A_{1,2}(0)$.

iii) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{\kappa_1(0)} \frac{\sin(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z\ .$$

Berechnen Sie das gleiche Kurvenintegral dann mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

Aufgabe 3. (Fourier-Reihen; **3+5+2 Punkte**)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x) = \frac{x}{2} - \pi$ für $0 \le x < 2\pi$.

i) Skizzieren Sie f. Ist f eine gerade Funktion? Ist f eine ungerade Funktion? Gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f + c$ eine gerade oder ungerade Funktion ist?

ii) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

iii) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe von f?