Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
Dr. Dominic Breit

Saarbrücken, 08.10.2010

Klausur Höhere Mathematik für Ingenieure IV a
Klausur Höhere Mathematik für Ingenieure IV a plus IV b, Teil 1

Die folgende Klausur besteht aus 3 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso das Themengebiet, aus dem die Aufgabe gewählt wurde.

Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Notation in $\mathbb{C}$: $z = x + iy$, $f = u + iv$ und zu fixiertem $0 < r \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\kappa_r(z_0)$ die Parametrisierung der Kreislinie $\kappa_r(z_0)(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$, $A_{r_1,r_2}(z_0)$ ist zu fixierten $0 \le r_1 < r_2$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

Aufgabe 1. (holomorphe Funktionen; Singularitäten; **1+2+3+1+1+2 Punkte**)

i) Für welche Konstanten $\underline{c \in \mathbb{R}}$ ist die Funktion $f(z) = (x + icy)^2$ holomorph?

ii) Für welche Konstanten $\underline{c \in \mathbb{C}}$ ist die Funktion $f(z) = (x + icy)^2$ holomorph?

iii) Ist die Funktion $u(x, y)$,

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \ , \qquad |z| \neq 0 \ ,$$

Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie gegebenenfalls den zugehörigen Imaginärteil.

iv) Charakterisieren Sie jeweils alle (isolierten) Singularitäten von:

$$\text{(a)}\ f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}; \quad \text{(b)}\ f(z) = \exp(1/z^2); \quad \text{(c)}\ f(z) = \frac{\sin(z)}{z(z + 3i)}.$$

bitte wenden

Aufgabe 2. (Kurvenintegrale; Residuen; Laurent-Reihen; Cauchysche Integralformel; **2+2+1+3+2 Punkte**)

i) Finden Sie einen Integrationsweg $\gamma\colon \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene mit

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2} \,\mathrm{d}z \neq 0 \ .$$

ii) Es sei

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \frac{i}{1+z} \ .$$

(a) Bestimmen Sie das Residuum von f in allen Singularitäten.

(b) Berechnen Sie $\int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}z$ für $\gamma = \kappa_2(0)$.

iii) Es sei $f(z) = \frac{1}{z-2}$. Berechnen Sie die Laurent-Reihe von f um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ auf $A_{2,3}(0)$.

iv) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{\kappa_1(0)} \frac{\sin(z)}{z^3} \,\mathrm{d}z \ .$$

Berechnen Sie das gleiche Kurvenintegral dann mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

Aufgabe 3. (Fourier-Reihen; **3+4+1.5+1.5 Punkte**)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} x+\pi & \text{für} \quad -\pi \le x < -\pi/2 \ , \\ \pi & \text{für} \quad -\pi/2 \le x < \pi/2 \ , \\ \pi - x & \text{für} \quad \pi/2 \le x < \pi \ . \end{cases}$$

i) Skizzieren Sie f. Ist f eine gerade bzw. ungerade Funktion?

ii) Bestimmen Sie die Koeffizienten b_2 und a_3 der Fourier-Reihe von f.

iii) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe von f?

iv) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x+\pi & \text{für} \quad -\pi < x \le -\pi/2 \ , \\ \pi & \text{für} \quad -\pi/2 < x \le \pi/2 \ , \\ \pi - x & \text{für} \quad \pi/2 < x \le \pi \ . \end{cases}$$