Beispiel 6.1: $x^2 y'' = (y')^2$ (6.1).

Sei $v(x) := y'(x)$. Dann $y''(x) = v'(x)$. Somit gilt:

(6.1) $\Leftrightarrow$ $x^2 v' = v^2$. $\leftarrow$ GDG mit trennbaren Variablen.

① $v \equiv 0$ erfüllt die Gleichung $\Rightarrow y = C,\ C \in \mathbb{R}$ ist eine (singuläre) Lösung von (6.1)

② $v \not\equiv 0$. Wir trennen die Variablen:

$$x^2 v' = v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{x}{Cx+1},\ C \in \mathbb{R}.$$

Also $y(x) = \int \frac{x\,dx}{Cx+1} + C_2,\ C, C_2 \in \mathbb{R}$.

Wir berechnen das Integral $\int \frac{x\,dx}{Cx+1}$.

- Fall 1: $C = 0 \Rightarrow y(x) = \int x\,dx + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y(x) = \frac{x^2}{2} + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

$y(x) = \frac{x^2}{2} + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt die Gleichung (6.1)

$\Rightarrow$ noch „eine" Lösung.

- Fall 2: $C \neq 0 \Rightarrow$

$$\int \frac{x\,dx}{Cx+1} = \frac{1}{C} \int \frac{Cx+1-1}{Cx+1}\,dx = \frac{1}{C}\int dx - \frac{1}{C}\int \frac{dx}{Cx+1} =$$

$$= \frac{1}{C}x - \frac{1}{C^2}\ln|Cx+1| + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Somit, die allgemeine Lösung:

$$\left[\begin{array}{l} y = C,\ C \in \mathbb{R} \\ y = \frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{C}x - \frac{1}{C^2}\ln|Cx+1| + C_2,\ C, C_2 \in \mathbb{R},\ C \neq 0 \end{array}\right.$$