<u>Beispiel 6.2</u>: $2y \cdot y'' = (y')^2 + 1$ (6.2).

Also: $x$ tritt nicht explizit auf $\Rightarrow v(y) := y'$.

Dann gilt: $y'' = \dot{v} \cdot v$. Somit:

$$(6.2) \Leftrightarrow 2y \cdot \dot{v} v = v^2 + 1$$

① $y \equiv 0$ löst nicht (6.2).

② $y \not\equiv 0$:

$$2y \cdot \dot{v} \cdot v = v^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{2v\,dv}{v^2+1} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow$$

$$\ln(v^2+1) = \ln|y| + C, \; C \in \mathbb{R}$$

mit $C = \ln K$, $K > 0$ gilt: $\ln(v^2+1) = \ln|Ky| \Leftrightarrow$

$$v^2 + 1 = |Ky| \Leftrightarrow v^2 + 1 = \pm Ky, \; K > 0 \Leftrightarrow$$

$$v^2 + 1 = Cy, \quad C \neq 0. \Leftrightarrow$$

$$v = \pm\sqrt{Cy - 1}, \; C \neq 0.$$

Also: $y' = \pm\sqrt{Cy-1}, \; C \neq 0$

- $Cy - 1 \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv \frac{1}{C}$ erfüllt nicht die Gleichung (6.2)
- $Cy - 1 \not\equiv 0$: $\frac{dy}{\sqrt{Cy-1}} = \pm dx \Leftrightarrow \frac{2}{C}\sqrt{Cy-1} = \pm x + C_2, \, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \quad Cy - 1 = \left(\pm \frac{Cx}{2} + C_3\right)^2, \; C, C_3 \in \mathbb{R}, \; C \neq 0.$$

Also: allgemeine Lösung in impliziter Form:

$$Cy - 1 = \left(\pm \frac{Cx}{2} + C_3\right)^2, \quad C, C_3 \in \mathbb{R}, \; C \neq 0.$$