

**Übungen zur Vorlesung “Höhere Mathematik für Ingenieure IV A” SoSe 2019,
Blatt 6 (20 Punkte)**

Abgabe: 02.07.2019. Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Überprüfen Sie, dass die Menge $C[a, b]$ aller auf $[a, b]$ stetigen Funktionen ein Vektorraum ist.

Aufgabe 13. (5 Punkte)

Betrachten Sie den Vektorraum $C[a, b]$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_\infty : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|x\|_\infty := \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$ eine Norm ist.

Aufgabe 14. (6 Punkte)

a) Betrachten Sie den Vektorraum \mathbb{R} versehen mit der Norm $\|x\| := |x|$. Betrachten Sie in diesem Vektorraum die Folge $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ mit $x_k := \frac{1}{k}$. Zeigen Sie:

- i) (1 Punkt) $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist;
- ii) (1 Punkt) $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ konvergent gegen 0 ist.

b) Betrachten Sie den Vektorraum $C[0, 1]$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$. Betrachten Sie in diesem Vektorraum die Folge $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ mit $x_k(t) := \frac{1}{k}t$. Zeigen Sie:

- i) (2 Punkte) $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist;
- ii) (2 Punkte) $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ konvergent gegen $x(t) \equiv 0$ ist.

Aufgabe 15. (6 Punkte)

Überprüfen Sie, ob die gegebene Abbildung Φ Lipschitz-stetig ist; eine Kontraktion ist:

- a) (1 Punkt) $\Phi : [0, 1/3] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = x^2$;
 - b) (1 Punkt) $\Phi : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = x^2$;
 - c) (1 Punkt) $\Phi : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \frac{\sin x}{2}$;
 - d) (3 Punkte) $\Phi : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ mit $(\Phi(x))(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$, wobei $C[0, 1]$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehen ist.
-

Die Übungsblätter sind auf unserer Homepage erhältlich:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/>