§ 3

Konforme Parametrisierungen und die Weierstraß–Darstellung

Interessiert man sich für solche Eigenschaften einer Fläche, die nicht von der Parametrisierung abhängen, so kann man zur Diskussion dieser Eigenschaften möglichst "gute" lokale Koordinatensysteme einführen. Es stellt sich heraus, dass sogenannte konforme Parameter viele Vorzüge in sich vereinen (geometrische Größen der Fläche S nehmen in konformen Koordinaten eine besonders einfache Form an).

DEFINITION

> Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $F : \Omega \to S$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) ein lokales Koordinatensystem. Die Parametrisierung F heißt **konform**, falls
>
> $$|\partial_u F| = |\partial_v F| \quad \text{und} \quad \partial_u F \cdot \partial_v F = 0$$
>
> auf dem Definitionsgebiet Ω gilt.

Obige Bedingung sagt, dass die kanonischen Tangentenvektoren $\partial_u F$, $\partial_v F$ stets gleichlang sind und zudem aufeinander senkrecht stehen. Man überlegt sich leicht, dass konforme Parametrisierungen F **winkeltreu** sind: Schneiden sich zwei ebene Kurven γ_1, γ_2 in Ω unter dem Winkel α, so schneiden sich die zughörigen Bildkurven $F \circ \gamma_1$, $F \circ \gamma_2$ ebenfalls unter diesem Winkel. Eine in voller Allgemeinheit nicht einfach zu beantwortende Frage ist natürlich die nach der Existenz von konformen Koordinatensystemen bei vorgelegter Fläche S. Dies werden wir später im Spezialfall klären, vorab begnügen wir uns mit einigen elementaren Aussagen.

Ist $F : \Omega \to S$ konform, so setzt man

$$\lambda^2 := |\partial_u F|^2 = |\partial_v F|^2$$

und sieht

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$$

für die erste Fundamentalform g von S, speziell ist

$$\det g = \lambda^4.$$

LEMMA 3.1

Ist F eine konforme Parametrisierung von S und bezeichnet $\mathbf{H}$ die auf S erklärte vektorielle mittlere Krümmung, so gilt

$$\Delta F = 2\lambda^2\,\mathbf{H}(F).$$

Insbesondere steht der komponentenweise gebildete Laplace–Operator ΔF auf S in den entsprechenden Bildpunkten von F senkrecht.

BEMERKUNG

Definiert man die mittlere Krümmung H bzgl. des natürlichen Normalenfeldes

$$\partial_u F \times \partial_v F / |\partial_u F \times \partial_v F|,$$

so ist

$$\mathbf{H}(F) = \lambda^{-2} H(F) \cdot \partial_u F \times \partial_v F,$$

wir bekommen die sogenannte

$$H\text{–Flächengleichung:}\quad \Delta F = 2H \circ F\;\partial_u F \times \partial_v F,$$

die folgende Bedeutung hat: Zu gegebener Funktion $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (und vorgeschriebenen Randbedingungen) sucht man Lösungen F der Gleichung auf Ω, die zusätzlich noch die Konformitätsrelation erfüllen. Die Bilder $F(\Omega)$ sind dann Flächen, die in jedem Punkt $F(u,v)$ die mittlere Krümmung $H(F)$ haben. Die Wahl $H \equiv 0$ führt als Spezialfall auf die Theorie konform parametrisierter Minimalflächen. Das H–Flächensystem hat eine sehr komplizierte Struktur, Existenz– und Regularitätssätze sind erst in den letzten Jahren bewiesen worden, und es gibt immer noch viele offene Fragen.

BEWEIS VON LEMMA 3.1

Sei

$$N(u,v) = \partial_u F \times \partial_v F / |\partial_u F \times \partial_v F|$$

(also $\mathcal{N} \circ F = N$). Wir zeigen

$$\Delta F \cdot \partial_u F = 0 = \Delta F \cdot \partial_v F,$$

was sofort $\Delta F = \vartheta N$ mit einer geeigneten Funktion $\vartheta : \Omega \to \mathbb{R}$ impliziert. Es ist

$$\begin{aligned}\partial_u^2 F \cdot \partial_u F &= \frac{1}{2}\,\partial_u |\partial_u F|^2 = \frac{1}{2}\,\partial_u |\partial_v F|^2 = \partial_v F \cdot \partial_u \partial_v F\\ &= \partial_v F \cdot \partial_v \partial_u F = \partial_v^2 F \cdot \partial_u F - \partial_v^2 F \cdot \partial_u F = -\partial_v^2 F \cdot \partial_u F,\end{aligned}$$

also $\Delta F \cdot \partial_u F = 0$, und die andere Relation folgt ganz analog. Es gilt andererseits:

$$\begin{aligned}H(F) &= \frac{1}{2\det g}\Big[|\partial_u F|^2\, I\!I(\partial_v F, \partial_v F) + |\partial_v F|^2\, I\!I(\partial_u F, \partial_u F)\Big]\\ &= \frac{1}{2\lambda^2}\Big[I\!I(\partial_u F, \partial_u F) + I\!I(\partial_v F, \partial_v F)\Big] = -\frac{1}{2\lambda^2}\Big[\partial_u F \cdot \partial_u N + \partial_v F \cdot \partial_v N\Big].\end{aligned}$$

Beachtet man

$$\partial_u F \cdot \partial_u N = -N \cdot \partial_u^2 F \quad \text{und} \quad \partial_v F \cdot \partial_v N = -N \cdot \partial_v^2 F,$$

so folgt:

$$H(F) = \frac{1}{2\lambda^2}\, \Delta F \cdot N = \frac{1}{2\lambda^2}\, \vartheta,$$

und damit $\Delta F = 2\lambda^2 H(F) \cdot N = 2\lambda^2\, \mathbf{H}(F)$. □

Als Korollar bekommt man

LEMMA 3.2

Sei F konforme Parametrisierung der Klasse C^2 einer Fläche S. Dann gilt:

$$S \text{ ist Minimalfläche } (H = 0) \quad \Longleftrightarrow \quad F \text{ ist harmonisch } (\Delta F = 0).$$

Wir wollen nun kurz andeuten, wie man konform parametrisierte Minimalflächen mit funktionentheoretischen Methoden beschreiben kann. Sei dazu

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \text{ offen},$$

eine beliebige Abbildung der Klasse C^2. Wir schreiben $z = u + iv$ für einen Punkt $(u, v) \in \Omega$ und setzen für $k = 1, 2, 3$

$$\phi_k(z) := \partial_u F^k(z) - i\, \partial_v F^k(z). \tag{3.1}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \phi_k^2(z) &= \sum_{k=1}^{3} \big(\partial_u F^k(z)\big)^2 - \sum_{k=1}^{3} \big(\partial_v F^k(z)\big)^2 - 2i \sum_{k=1}^{3} \partial_u F^k(z)\, \partial_v F^k(z) \\ &= |\partial_u F|^2(z) - |\partial_v F|^2 - 2i\, \partial_u F(z) \cdot \partial_v F(z), \end{aligned} \tag{3.2}$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{3} |\phi_k|^2(z) = |\partial_u F(z)|^2 + |\partial_v F(z)|^2, \tag{3.3}$$

und man erkennt sofort folgende Aussagen:

(a) ϕ_k holomorph auf Ω für jedes $k = 1, 2, 3$ genau dann, wenn F auf Ω harmonisch ist.

BEWEIS

Es ist

$$\Delta F^k = \partial_u^2 F^k + \partial_v^2 F^k = \partial_u \mathrm{Re}\, \phi_k - \partial_v \mathrm{Im}\, \phi_k,$$

so dass also gilt:

$$\Delta F^k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_u \mathrm{Re}\, \phi_k = \partial_v \mathrm{Im}\, \phi_k$$

Diese Gleichung folgt aber sofort aus der Definition von ϕ_k, denn die zweiten Ableitungen von F^k sind ja symmetrisch. Mithin verschwindet der Laplace–Operator von F^k genau dann, wenn ϕ_k die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen erfüllt, also eine auf Ω holomorphe Funktion darstellt.

(b) F ist genau dann konform, wenn $\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2 \equiv 0$ auf Ω ist.

BEWEIS

Dies ergibt sich unmittelbar aus (3.2).

(c) Ist F konform, so gilt:

$$\operatorname{rg} DF = 2 \text{ auf } \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{3} |\phi_k|^2 > 0 \text{ auf } \Omega.$$

BEWEIS

Offenbar ist $\operatorname{rg} DF(z) = 2$ wegen der Konformitätsrelation gleichbeutend mit

$$\begin{aligned} \big|\partial_u F(z) \times \partial_v F(z)\big| > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \big|\partial_u F(z)\big|^2 \big|\partial_v F(z)\big|^2 - \big(\partial_u F \cdot \partial_v F\big)^2 > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \big|\partial_u F(z)\big|^4 > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \big|\partial_u F(z)\big|^2 + \big|\partial_v F(z)\big|^2 > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{3} \big|\phi_k(z)\big|^2 > 0. & \end{aligned}$$

□

Als Konsequenz von (a)–(c) erhält man:

LEMMA 3.3

Sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ konforme Parametrisierung eines Teils einer Minimalfläche S (im Sinne $H = 0$). Dann gilt:

$$\phi_k(z) := \partial_u F^k(z) - i\, \partial_v F^k(z), \quad (k = 1, 2, 3,\ z = u + iv \in \Omega),$$

sind holomorph auf Ω mit

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k(z)^2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{3} \big|\phi_k(z)\big|^2 > 0 \tag{3.4}$$

in jedem Punkt $z \in \Omega$.

□

Nun sind wir aber eigentlich an Verfahren zur Erzeugung von Minimalflächen interessiert, und Lemma 3.3 geht gerade wieder den anderen Weg. Um Minimalflächen zu konstruieren, gehen wir aus von drei holomorphen Funktionen

$$\phi_1,\, \phi_2,\, \phi_3 : \Omega \to \mathbb{C}$$

mit gemeinsamem Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ aus und verlangen die Gültigkeit von (3.4) in jedem Punkt $z \in \Omega$. Ist Ω einfach zusammenhängend (anschaulich "ohne Löcher"), so gibt es zu ϕ_k eine bis auf additive Konstanten eindeutige komplexe Stammfunktion, zum Beispiel ist dann die Wahl

$$\Psi_k(z) := \int_{z_0}^{z} \phi_k(\zeta)\, d\zeta \quad (z \in \Omega)$$

möglich, worin $\int_{z_0}^{z}$ die Integration längs eines beliebigen Weges in Ω von z_0 nach z bedeutet und $z_0 \in \Omega$ für einen beliebigen, aber fest gewählten, Basispunkt steht.

Setzt man nun

$$F^k(z) := \operatorname{Re}\Psi_k(z) \quad (z \in \Omega), \tag{3.5}$$

so ist $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reell analytische Abbildung, für die offenbar gilt:

$$\partial_u F^k - i\,\partial_v F^k = \partial_u \operatorname{Re}\Psi_k - i\,\partial_v \operatorname{Re}\Psi_k = \partial_u \operatorname{Re}\Psi_k + i\,\partial_v \operatorname{Im}\Psi_k = \Psi_k'(z) = \phi_k(z)$$

für alle $z \in \Omega$, denn für jede holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist deren komplexe Ableitung gegeben durch

$$f'(z) = \partial_u \operatorname{Re} f(z) + i\,\partial_v \operatorname{Im} f(z) \quad (z = u + iv \in \Omega).$$

Mithin sind die gemäß (3.1) zu F assozierten Funktionen gerade unsere vorgegebenen holomorphen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, und aus den Bedingungen (3.4) lesen wir mit unseren Vorüberlegungen ab: Die in (3.5) definierte Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ist harmonisch, erfüllt die Konformitätsrelation und hat überall maximalen Rang. Allerdings handelt es sich bei F im allgemeinen nicht um eine Parametrisierung der Bildmenge $F(\Omega)$, denn über globale Injektivität von F wird ja nichts ausgesagt. Mit anderen Worten: $F(\Omega)$ kann durchaus Selbstdurchschneidungen haben und ist dann gar keine Mannigfaltigkeit! (F ist lediglich eine konforme Immersion.) Immerhin lässt sich folgendes sagen: Ist $(u_0, v_0) \in \Omega$ beliebig, so folgt aus $\operatorname{rg} DF(u_0, v_0) = 2$ die Existenz einer kleinen Umgebung Ω' von (u_0, v_0) in Ω, so dass $F|_{\Omega'}$ das Gebiet $F(\Omega')$ regulär parametrisiert; folglich ist $F(\Omega')$ eine Mannigfaltigkeit mit verschwindender mittlerer Krümmung, und das ganze Bild $F(\Omega)$ ist aus solchen Stücken von Minimalflächen zusammengesetzt. Wir halten fest:

LEMMA 3.4

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und seien $\phi_k : \Omega \to \mathbb{C}$ auf Ω holomorph mit (3.4). Man setzt für $z_0 \in \Omega$ (bis auf Konstanten)

$$F_k(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \phi_k(\zeta)\, d\zeta \quad (k = 1, 2, 3,\ z \in \Omega).$$

Dann ist für genügend kleine Teilgebiete Ω' von Ω das Bild $F(\Omega')$ eine Minimalfläche, die durch $F|_{\Omega'}$ regulär und konform parametrisiert wird. Für injektive F ist sogar das ganze Bild $F(\Omega)$ eine Minimalfläche.

□

BEMERKUNG

Verzichtet man auf die Forderung $\sum_k |\phi_k|^2 > 0$ in jedem Punkt, so bedeutet dies, dass es ein $z \in \Omega$ gibt mit $\operatorname{rg} DF(z) < 2$, was wegen der Konformität äquivalent ist zu $\partial_u F(z) = \partial_v F(z) = 0$. Solche Punkte nennt man **Verzweigungspunkte** von F. Verzweigungspunkte sind offenbar genau die gemeinsamen Nullstellen von ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3, die nach bekannten Sätzen über holomorphe Funktionen in Ω isoliert liegen, sich also nicht im Inneren von Ω sondern nur zum Rand $\partial\Omega$ hin häufen können, vorausgesetzt nicht alle drei Funktionen sind identisch 0.

ZUSATZ ZU LEMMA 3.4

Seien ϕ_1, ϕ_2, $\phi_3 : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, nicht identisch 0, mit

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2 \equiv 0.$$

Dann gibt es eine höchstens abzählbare Menge $\Lambda \subset \Omega$ ohne Häufungspunkte in Ω, so dass $F(\Omega')$ für genügend kleine Gebiete $\Omega' \subset \Omega \setminus \Lambda$ eine regulär parametrisierte Minimalfläche ist. □

Diese Erkenntnis bringt uns natürlich der Lösung des Plateau–Problems (Konstruktion von Minimalflächen zu gegebener Berandung Γ) in keiner Weise näher; immerhin sind wir jetzt in der Lage, durch Angabe holomorpher Funktionen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 mit $\sum_k \phi_k^2 \equiv 0$ eine Vielzahl von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung zu definieren. Das führt letztendlich auf:

Die Weierstraß–Darstellung für Minimalflächen:

Nach den vorstehenden Überlegungen reduziert sich die Fragestellung darauf, bei gegebenem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen $\phi_k : \Omega \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3$, zu finden mit

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \quad \text{auf } \Omega. \tag{3.6}$$

Man erhält folgende Aussage:

SATZ 3.1

Sei $g : \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph (also holomorph bis auf Polstellen als mögliche Singularitäten), $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit folgender Eigenschaft. Hat g in z einen Pol der Ordnung m, soll f in z eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 2m$ haben. Dann sind die Funktionen

$$\phi_1 := \frac{1}{2} f\big(1 - g^2\big), \quad \phi_2 := \frac{i}{2} f\big(1 + g^2\big) \quad \text{und} \quad \phi_3 := fg \tag{3.7}$$

holomorph in Ω und Lösungen von (3.6). Sind umgekehrt ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 Lösungen von (3.6), für welche **nicht**

$$\phi_1 = i\phi_2, \qquad \phi_3 = 0$$

ist, so findet man f, g wie oben beschrieben und mit der Eigenschaft, dass ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 durch die Formeln (3.7) gegeben sind.

BEMERKUNG

Sind f, g wie in Satz 3.1, so nennt man $F : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$F_1(z) := \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \frac{1}{2} f(\zeta)\big(1 - g^2(\zeta)\big)\, d\zeta,$$

$$F_2(z) := \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \frac{i}{2} f(\zeta)\big(1 + g^2(\zeta)\big)\, d\zeta,$$

$$F_3(z) := \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} f(\zeta) g(\zeta)\, d\zeta,$$

mit $z_0 \in \Omega$, die **Weierstraß–Darstellung** der "Minimalfläche $F(\Omega)$". Hierbei ist die Bezeichnung Minimalfläche so zu verstehen, dass Verzweigungspunkte und Selbstdurchschneidungen zulässig sind, die Einschränkung von F auf kleine Gebiete $\Omega' \subset \Omega$ ohne Verzweigungspunkte aber regulär konforme Parametrisierungen von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung sind.

Anmerkung: Eine holomorphe Funktion $g : \Omega \setminus \Lambda \to \mathbb{C}$ heißt auf Ω meromorph, wenn Λ eine abzählbare Teilmenge von Ω ist, die sich höchstens zum Rand $\partial\Omega$ von Ω hin häuft, und wenn g in jedem Punkt $z \in \Lambda$ eine Polstelle hat (vgl. [Cartan], S. 45 oder [Behnke, Sommer], S. 201).
Meromorphe Funktionen $g : \Omega \to \mathbb{C}$ haben die Form $g = \varphi/\psi$ mit holomorphen Funktionen $\varphi, \psi : \Omega \to \mathbb{C}$, wobei φ auf Ω nullstellenfrei ist und ψ auf einer abzählbaren Menge $\Lambda \subset \Omega$ verschwindet.

BEWEIS VON SATZ 3.1

Seien f, g wie im Satz beschrieben und ϕ_k, $k = 1, 2, 3$, gemäß (3.7) erklärt. Ist z_0 Pol der Ordnung m von g, so folgt die Beschränktheit von $(fg^2)(z)$ bei $z \to z_0$, so dass die Singularität z_0 von fg^2 hebbar ist. Erstrecht hat dann fg bei z_0 keine Singularität, weshalb ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 auf Ω holomoroph sind. Die Gültigkeit von (3.6)

rechnet man nach.
Seien nun umgekehrt ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 auf Ω holomorphe Lösungen von (3.6) und nicht vom Typ

$$\phi_1 = i\phi_2, \quad \phi_3 = 0.$$

Man setzt dann (multipliziere die zweite Gleichung aus (3.7) mit $-i$ und addiere das Ergebnis zur ersten Gleichung)

$$f := \phi_1 - i\phi_2, \quad g := \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

Dann ist f holomorph und g meromorph auf Ω und aus (3.6) folgt

$$\big(\phi_1 - i\phi_2\big)\big(\phi_1 + i\phi_2\big) = -\phi_3^2,$$

also

$$\phi_1 + i\phi_2 = -\frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -fg^2.$$

Die linke Seite ist auf Ω holomorph, also muss auch fg^2 holomorph sein, und dies ist nur möglich, wenn f in den Polen von g der Ordnung m eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 2m$ hat. Dass schließlich mit den oben definierten Funktionen f, g die Beziehungen (3.7) bestehen, rechnet man einfach nach. □

ZUSATZ

Sind f, g wie in Satz 3.1 und gilt zusätzlich, dass f in jedem Pol von g der Ordnung m eine Nullstelle der Ordnung genau $2m$ hat, und die Nullstellen von f genau die Polstellen von g sind, so ist F ohne Verzweigungspunkte.

BEWEIS

Ein Punkt $z \in \Omega$ ist genau dann ein Verzweigungspunkt von F, wenn

$$\big|\phi_1(z)\big|^2 + \big|\phi_2(z)\big|^2 + \big|\phi_3(z)\big|^2 = 0$$

gilt, wobei ϕ_k, $k = 1, 2, 3$, mit f und g gemäß (3.7) erklärt sind. Speziell ist (vgl. die vorige Rechnung)

$$0 = \phi_1(z) + i\phi_2(z) = -f(z) \cdot g^2(z) \quad \text{und} \quad 0 = \phi_1(z) - i\phi_2(z) = f(z).$$

Mithin ist z Nullstelle von f der Ordnung $2m$ und daher Pol von g der Ordnung m. Vermöge dieser Ordnungsbeziehungen kann aber $f(z)g^2(z)$ nicht verschwinden. □

BEISPIEL

Wir betrachten die Funktionen

$$f(z) = z^2, \quad g(z) = 1/z.$$

Offenaber ist f auf $\mathbb{C}$ holomorph und g ist meromorph mit der einfachen Polstelle $z = 0$. Gemäß (3.7) ist

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2}\left(z^2 - 1\right), \quad \phi_2(z) = \frac{i}{2}\left(z^2 + 1\right), \quad \phi_3(z) = z,$$

und man erhält die Weierstraß–Darstellung:

$$F_1(z) = \operatorname{Re}\int_0^z \frac{1}{2}\,(\zeta^2-1)\,d\zeta = \operatorname{Re}\Big(\frac{z^3}{6}-\frac{z}{2}\Big),$$

$$F_2(z) = \operatorname{Re}\int_0^z \frac{i}{2}\,(\zeta^2+1)\,d\zeta = \operatorname{Re} i\Big(\frac{z^3}{6}+\frac{z}{2}\Big),$$

$$F_3(z) = \operatorname{Re}\int_0^z \zeta\,d\zeta = \frac{1}{2}\operatorname{Re} z^2,$$

also (vermöge der Identifikation $z = u+iv \leftrightarrow (u,v)$)

$$F_1(u,v) = \frac{1}{6}\,(u^3-3uv^2) - \frac{1}{2}u,$$

$$F_2(u,v) = \frac{1}{6}\,(v^3-3u^2v) - \frac{1}{2}v,$$

$$F_3(u,v) = \frac{1}{2}\,(u^2-v^2).$$

Das ist bis auf Ähnlichkeiten (Streckung mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ und Spiegelung an der xy–Ebene) genau die sog. **Enneper–Minimalfläche**, die in *Fig. 3.1* dargestellt ist. (Vgl. dazu auch [Do Carmo], S. 205 und [Leichtweiß].) Die Enneper–Fläche ist ohne Verzweigungspunkte (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 haben keine gemeinsamen Nullstellen), allerdings treten Selbstdurchschneidungen auf (vgl. [Do Carmo], S. 206).

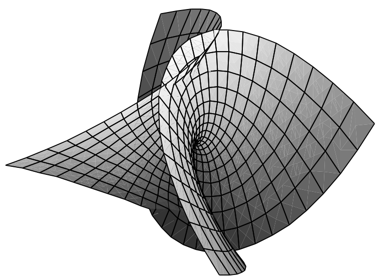

Fig. 3.1

□

Die vorstehenden Überlegungen haben mehrfach ausgenutzt, dass man lokal konforme Parameter einführen kann. Ob dies aber tatsächlich geht, ist nicht ganz offensichtlich. **Tatsächlich kann man auf jeder Fläche lokal konforme Koordinatensysteme einführen** (eine Ausarbeitung findet man z. B. bei [Bers], S. 15–35). Wir begnügen uns damit, den Existenzbeweis für Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung zu führen, die Argumente sind dann wesentlich einfacher.

SATZ 3.2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ regulär (d. h. injektiv, glatt und DF mit maximalem Rang). Außerdem verschwinde die mittlere Krümmung von $S = F(\Omega)$ (d. h. $H(F) = 0$). Dann hat jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung $V = V(p)$, so dass $S \cap V$ über einem Gebiet der Ebene konform parametrisiert werden kann.

BEWEIS

Sei $p \in S$ beliebig. Da für die vorgegebene Parametrisierung überall $\operatorname{rg} DF = 2$ ist, kann man S so im Raum $\mathbb{R}^3$ drehen, dass S lokal bei p Graph einer Funktion $f(u, v)$ ist, d. h. man findet eine (offene) Kreisscheibe $D_r(a) \subset \Omega$ und eine glatte Funktion $f : D_r(a) \to \mathbb{R}$ mit

$$S \cap V = G_f$$

für eine geeignete Umgebung $V = V(p) \subset \mathbb{R}^3$ von p. Hierbei ist zu beachten, dass die mittlere Krümmung eine gegen Rotation invariante Größe ist und dass man konforme Parametrisierungen mit Rotationen verketten kann, ohne die Konformität zu zerstören. Man setzt

$$\varphi_1 := \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2}\big(1 + (\partial_u f)^2\big),$$
$$\varphi_2 := \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2}\,\partial_u f\,\partial_v f$$

auf $D_r(a)$ und erhält

$$\begin{aligned}\partial_v\varphi_1 - \partial_u\varphi_2 &= -\big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-3/2}\Big[\partial_u f\,\partial_v f\,\Big(\big(1 + \partial_u f^2\big) - \partial_v f^2 - \big(1 + |\nabla f|^2\big)\Big)\\ &\qquad + \partial_v f\,\partial_v^2 f\,\big(1 + \partial_u f^2\big) + \partial_v f\,\partial_u^2 f\,\Big(\big(1 + |\nabla f|^2\big) - \partial_u f^2\Big)\Big]\\ &= -\big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-3/2}\Big[\partial_u^2 f\big(1 + \partial_v f^2\big) - 2\,\partial_u f\,\partial_v f\,\partial_u\partial_v f + \partial_v^2 f\big(1 + \partial_u f^2\big)\Big] = 0,\end{aligned}$$

denn $\big[\dots\big]$ ist ja gerade die nichtparametrische Minimalflächengleichung für f. Daraus folgt: Es gibt eine (bis auf Konstanten eindeutig bestimmte) sog. Potentialfunktion $\Phi : D_r(a) \to \mathbb{R}$, d. h. mit $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2)$ ist

$$\nabla\Phi = \varphi \quad \text{in } D_r(a), \tag{3.8}$$

die man sofort explizit angeben kann. Im Fall $a = (0, 0)$ (sonst nehme man eine Translation vor) ist zum Beispiel

$$\Phi(u, v) := \int_0^1 \varphi(tu, tv) \cdot (u, v)\,dt$$

eine mögliche Wahl, denn:

$$\begin{aligned}\partial_u\Phi(u, v) &= \int_0^1 \varphi(tu, tv) \cdot (1, 0) + t\,\nabla\varphi(tu, tv) \cdot (u, v)\,dt\\ &= \int_0^1 \varphi_1(tu, tv) + t\,\big(u\,\partial_u\varphi_1(tu, tv) + v\,\partial_v\varphi_1(tu, tv)\big)\,dt\\ &= \int_0^1 \varphi_1(tu, tv) + t\,\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi_1(tu, tv)\,dt = \varphi_1(u, v),\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt partiell integriert wurde; entsprechend rechnet man $\partial_v \Phi = \varphi_2$ nach.

Analog zu φ_1, φ_2 definieren wir weiter die Funktionen

$$\psi_1 := \varphi_2, \quad \psi_2 := \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{1/2} \big(1 + (\partial_v f)^2\big)$$

auf $D_r(a)$, und schließen wie oben auf die Existenz einer Funktion $\Psi : D_r(a) \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla \Psi = \psi \quad \text{in } D_r(a), \tag{3.9}$$

wobei $\psi := (\psi_1, \psi_2)$ ist. Sei jetzt

$$\Lambda(u,v) = \big(u + \Phi(u,v), u + \Psi(u,v)\big), \quad \big((u,v) \in D_r(a)\big).$$

Wir berechnen die Funktionaldeterminante:

$$\begin{aligned} \det D\Lambda &= \partial_u \Lambda_1 \, \partial_v \Lambda_2 - \partial_u \Lambda_2 \, \partial_v \Lambda_1 \\ &= 1 + \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2} \big(2 + (\partial_u f)^2 + (\partial_v f)^2\big) \\ &\quad + (1 + |\nabla f|^v)^{-1} \big(1 + (\partial_u f)^2\big) \big(1 + (\partial_v f)^2\big) \\ &\quad - \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1} \partial_u f^2 \, \partial_v f^2 > 1, \end{aligned}$$

so dass Λ insbesondere eine kleine Kreisscheibe $D_\varrho(a) \subset D_r(a)$ diffeomorph auf eine Umgebung $U = U(b)$ des Punktes $b := \Lambda(a)$ abbildet. (Tatsächlich ist Λ sogar besser, vgl. Lemma 5.4.) Schließlich betrachten wir die Abbildung

$$\chi : U \ni (\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto \big(\Lambda|_{D_\varrho(a)}^{-1}(\tilde{u}, \tilde{v}),\ f \circ \Lambda|_{D_\varrho(a)}^{-1}(\tilde{u}, \tilde{v})\big) \in G_{f|_{D_\varrho(a)}}$$

Nach Konstruktion ist klar, dass χ den Bereich U auf eine Umgebung von p in S abbildet, nämlich auf genau den Teil von S im Kreiszylinder $D_\varrho(a) \times \mathbb{R}$ über der verkleinerten Kreisscheibe $D_\varrho(a)$ (*Fig. 3.2*). Weiterhin ist offensichtlich, dass χ überall den maximal möglichen Rang 2 hat, denn dies gilt für die Graphenabbildung und diese wird von rechts mit dem Diffeomorphismus $\Lambda|_{D_\varrho(a)}^{-1}$ verknüpft.

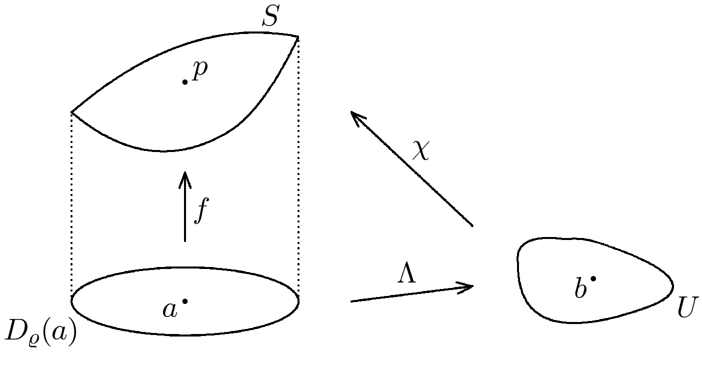

Fig. 3.2

Nachzurechnen bleiben die Konformitätsrelationen: Mit $(u,v) = \Lambda|_{D_\varrho(a)}^{-1}(\tilde{u},\tilde{v})$ wird

$$D\big(\Lambda|_{D_\varrho(a)}^{-1}\big)(\tilde{u},\tilde{v}) = \big(D\Lambda(u,v)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\varphi_1(u,v) & \varphi_2(u,v) \\ \varphi_2(u,v) & 1+\psi_2(u,v) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\det D\Lambda(u,v)} \begin{pmatrix} 1+\psi_2(u,v) & -\varphi_2(u,v) \\ -\varphi_2(u,v) & 1+\varphi_1(u,v) \end{pmatrix} =: \frac{1}{\det D\Lambda(u,v)}\, \Pi(u,v),$$

und damit

$$D\big(f \circ \Lambda|_{D_\varrho(a)}^{-1}\big)(\tilde{u},\tilde{v}) = Df(u,v) \circ D\big(\Lambda|_{D_\varrho(a)}^{-1}\big)(\tilde{u},\tilde{v})$$

$$= \frac{1}{\det D\Lambda(u,v)}\, \Pi(u,v)\, \nabla f(u,v) = \frac{1 + \big(1 + \big|\nabla f(u,v)\big|^2\big)^{-1/2}}{\det D\Lambda(u,v)}\, \nabla f(u,v)$$

Daraus folgt

$$D\chi(\tilde{u},\tilde{v}) = \frac{1}{\det D\Lambda(u,v)} \begin{pmatrix} \Pi(u,v) \\ \pi(u,v) \end{pmatrix},$$

$$\pi(u,v) := 1 + \big(1 + \big|\nabla f(u,v)\big|^2\big)^{-1/2} \nabla f(u,v).$$

Damit bleibt zu zeigen, dass die Spalten $X = X(u,v)$, $Y = Y(u,v)$ der Matrix $\big(\Pi,\pi\big)$ die Konformitätsbedingungen erfüllen:

$$X \cdot Y = -2\,\partial_u f\,\partial_v f\big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2} - \left(1 + \frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)\partial_u f\,\partial_v f$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{1+|\nabla f|^2} + 2\big(1+|\nabla f|^2\big)^{-1/2}\right)\partial_u f\,\partial_v f \equiv 0$$

und man rechnet analog nach:

$$|X|^2 - |Y|^2 \equiv 0$$

Damit ist gezeigt:

$$\partial_u\chi \cdot \partial_v\chi = 0, \quad \text{und} \quad \big|\partial_u\chi\big| = \big|\partial_v\chi\big|,$$

so dass χ eine konforme Parametrisierung von S bei p ist. □

Als Anwendung bekommt man:

SATZ 3.3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig diferenzierbare Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung. Dann ist f reell analytisch.

BEWEIS

Sei $(u_0, v_0) \in \Omega$ beliebig. Nach den Überlegungen aus dem vorigen Satz gibt es eine (kleine) Kreisscheibe $D_\varrho(u_0, v_0)$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und einen C^2–Diffeomorphismus $\Lambda : D_\varrho(u_0, v_0) \to U$, so dass

$$\chi := \left(\Lambda^{-1}, f \circ \Lambda^{-1}\right) : U \to \mathbb{R}$$

die Fläche G_f lokal bei $\big(u_0, v_0, f(u_0, v_0)\big)$ konform parametrisiert.
Beachte: Λ ist so regulär wie die beiden Funktionen Φ, Ψ. Aus den Formeln (3.8) bzw. (3.9) folgt, dass die Ableitungen von Φ, Ψ nur erste Ableitungen von f enthalten. Für C^2–Funktionen f sind also auch Φ, Ψ von der Klasse C^2.
Nach Lemma 3.2 gilt nun

$$\Delta\chi = \Delta(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = 0,$$

die anschließend Proposition ergibt daher, dass χ_1, χ_2 und χ_3 reell analytisch sind. Insbesondere ist Λ^{-1} reell analytisch (genauer jede Komponente von Λ^{-1}), und damit auch Λ selbst. Die Analytizität von $\chi_3 = f \circ \Lambda^{-1}$ ergibt also:

$$f = \left(f \circ \Lambda^{-1}\right) \circ \Lambda \in C^\omega,$$

was zu zeigen war. $\square$

PROPOSITION

> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $h : \Omega \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 eine harmonische Funktion. Dann ist h reell analytisch.

BEWEIS

Sei $D_r(z_0) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Man sucht eine Funktion $H : D_r(z_0) \to \mathbb{R}$ so, dass

$$f := h + iH : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$$

holomorph ist. Die Analytizität von f liefert dann sofort die von h.
Sei o. E. $z_0 := 0$. Man setzt an (unterstellt H existiert und mit $z := u + iv = (u, v)$)

$$\begin{aligned} H(z) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} H(tz)\, dt + H(0) \\ &= \int_0^1 u\, \partial_u H(tz) + v\, \partial_v H(tz)\, dt + H(0) \\ &= \int_0^1 -u\, \partial_v h(tz) + v\, \partial_u h(tz)\, dt + H(0) \end{aligned}$$

nach den Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen. Da die Konstante $H(0)$ unwesentlich ist, wird man auf folgende Definition geführt:

$$H(z) := \int_0^1 v\, \partial_u h(tz) - u\, \partial_v h(tz)\, dt.$$

Zu überprüfen ist, ob für $f := h + iH$ nun wirklich die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen gelten:

$$\begin{aligned}\partial_u H(z) &= \int_0^1 -u\,\partial_v h(tz) - tu\,\partial_u\partial_v h(tz) + tv\,\partial_u^2 h(tz)\,dt\\ &= \int_0^1 -\partial_v h(tz) - tu\,\partial_u\partial_v h(tz) - tv\,\partial_v^2 h(tz)\,dt,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Harmonizität von h ausgenutzt wurde. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\partial_v h(tz)\big) = u\,\partial_u\partial_v h(tz) + v\,\partial_v^2 h(tz)$$

wird also

$$\partial_u H(z) = \int_0^1 -u\,\partial_v h(tz) - t\,\frac{\partial}{\partial t}\big(\partial_v h(tz)\big)\,dt = -\partial_v h(z),$$

und mit demselben Argument folgt $\partial_v H = \partial_u h$. □

BEMERKUNG

Die Funktion H heißt die zu h konjugiert harmonische Funktion, diese existiert lokal immer und ist bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt. Auf einfach zusammenhängenden Gebieten findet man global konjugiert harmonische Funktionen. Umgekehrt gilt wegen der Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen: Ust $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind $\mathrm{Re}\,\varphi$ und $\mathrm{Im}\,\varphi$ harmonisch auf Ω.