§ 4

Der Satz von Bernstein

In diesem Abschnitt geht es um den sog. Satz von Bernstein (1916 formuliert und 1927 erschienen, s. [Bernstein]) und damit zusammenhängende Folgerungen. Der Satz lautet (vgl. [Nitsche], S. 130)

SATZ 4.1 (Bernstein)

Eine ganze C^2– Lösung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der nichtparametrischen Minimalflächengleichung ist affin–linear, d. h. der f zugeordnete Graph G_f ist eine Ebene in $\mathbb{R}^3$.

BEMERKUNG

(1) Der Terminus "ganze Lösung" bezieht sich darauf, dass f auf der ganzen Ebene erklärt ist und dort die nichtparametrische Minimalflächengleichung löst.

(2) Der Satz von Bernstein erinnert in seiner Konzeption etwas an den bekannten Satz von Liouville über ganze holomorphe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welcher besagt:

$$f \text{ beschränkt} \quad \Longrightarrow \quad f \equiv \text{const.}$$

Als Folgerung des Satzes von Liouville bekommt man den

Satz von Liouville für harmonische Funktionen:
Ist $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Lösung von $\Delta h = 0$ und zudem beschränkt, so muss h konstant sein.

Gleichzeitig gibt es durchaus nichtkonstante und nicht affin–lineare, ganze Lösungen von

$$\Delta h \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2,$$

d. h. aus dem Erfülltsein der linearen Laplace–Gleichung alleine lässt sich über die Struktur der Lösung noch keine Information gewinnen. Der Satz von Bernstein zeigt, dass Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen ein vom linearen Fall völlig abweichendes Verhalten zeigen können.

(3) Statt Minimalflächen $S \subset \mathbb{R}^3$ zu betrachten kann man allgemeiner n–dimensionale minimale Hyperflächen im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ studieren. Zum Beispiel ist der Graph einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, genau dann lokal minimal in $\mathbb{R}^{n+1}$, wenn

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0 \quad \text{auf } \Omega \tag{4.1}$$

gilt, und viele Autoren haben sich mit der naheliegenden Frage befasst, ob der Satz von Bernstein auf ganze Lösungen von (4.1) ausgedehnt werden kann. Dies gelang schrittweise für $n \le 7$ (z. B. Almgren, De Giorgi, Simons), in Dimensionen $n > 7$ gibt es jedoch Gegenbeispiele (vgl. [Nitsche], S. 130, für Literatur).

Mit Vorkenntnissen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen kann man Satz 4.1 auf elegantem Weg beweisen, wir bevorzugen eine schrittweise elementare Darstellung, die auf einer genauen Analyse der Abbildungseigenschaften des im Beweis von Satz 3.2 eingeführten Diffeomorphismus Λ beruht: Das Bild der Kreisscheibe $D_r(a)$ unter Λ enthält insbesondere eine Kreisscheibe um $\Lambda(a)$ mit Radius r.

Das ist die Aussage von Lemma 4.4, die ihrerseits aus einigen einfachen Sachverhalten für konvexe Funktionen folgt.

LEMMA 4.1

Sei $E : D \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 auf einer konvexen Menge $D \subset \mathbb{R}^2$. Die Hesse–Matrix D^2E sei in jedem Punkt positiv definit, d. h.

$$D^2E(x)(z,z) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in D,\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Dann gilt:

$$\big(\nabla E(x) - \nabla E(y)\big) \cdot (x-y) > 0 \tag{4.2}$$

für alle $x \neq y$ aus D.

BEWEIS

Mit $e(t) := E\big(tx + (1-t)y\big)$ für $t \in [0,1]$ ist

$$e'(1) - e'(0) = \big(\nabla E(x) - \nabla E(y)\big) \cdot (x-y)$$

und

$$e''(t) = D^2E\big(tx+(1-t)y\big)(x-y, x-y) > 0 \quad \text{für alle} \quad t \in [0,1],$$

also $e'(1) > e'(0)$. $\square$

LEMMA 4.2

Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.1 sei

$$L := id_D + \nabla E : D \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \big(x + \partial_x E(x,y), y + \partial_y E(x,y)\big).$$

Dann ist für alle $x \neq y$ aus D

$$\big(L(x) - L(y)\big) \cdot (x - y) > |x - y|^2, \tag{4.3}$$

$$\big|L(x) - L(y)\big| > |x - y|. \tag{4.4}$$

BEWEIS

(4.3) sieht man direkt aus (4.2):

$$\big(L(x) - L(y)\big) \cdot (x - y) = \big(\nabla E(x) - \nabla E(y)\big) \cdot (x - y) + |x - y|^2 > |x - y|^2,$$

und (4.4) folgt, wenn man die linke Seite von (4.3) nach oben mit der Ungleichung von Cauchy–Schwarz abschätzt. □

LEMMA 4.3

Mit den Notationen aus den Lemmata 5.1 und 5.2 und $D := D_r(0)$ für ein $r > 0$ gilt: Die Abbildung L ist ein Diffeomorphismus von $D_r(0)$ auf ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und es ist

$$D_r\big(L(0)\big) \subset G, \tag{4.5}$$

d. h. G enthält eine Kreisscheibe mit Radius r um $L(0)$.

BEWEIS

Nach (4.4) ist L injektiv, es gilt:

$$DL(x,y) = I + D^2E(x,y),$$

so dass insbesondere $\det DL(x,y) > 0$ ist für alle $(x,y) \in D$. Zusammen mit der Injektivität folgt, dass L ein globaler Diffeomorphismus von D auf $G := L(D)$ ist. Damit ist (4.5) klar, wenn G die ganze Ebene ist. Andernfalls existiert ein Punkt $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus G$ (abgeschlossen) mit

$$\big|\xi - L(0)\big| = \inf_{\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus G} \big|\eta - L(0)\big|.$$

Natürlich ist $\xi \in \partial\big(\mathbb{R}^2 \setminus G\big) = \partial G$, und man findet eine Folge $(\xi_k) \subset G$ mit $\xi_k \xrightarrow{k} \xi$. Sei $(x_k) \subset D$ mit $L(x_k) = \xi_k$, also die zugehörige Urbildfolge. Da (x_k) beschränkt in $\mathbb{R}^2$ ist, hat (x_k) nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit (x_k) bezeichnen wollen, also:

$$x_k \xrightarrow{k}: x \quad \text{für ein} \quad x \in \overline{D}.$$

Offenbar ist aber $x \notin D$, denn sonst hätte man $\xi = L(x) \in G$, im Widerspruch zu $\xi \in \partial G$. Also ist $x \in \partial D$, d. h. es strebt $|x_k| \xrightarrow{k} R$, und (4.4) liefert

$$\big|L(x_k) - L(0)\big| > |x_k|, \quad \text{mithin} \quad \big|\xi - L(0)\big| \geq R.$$

Ist also $\xi' \in D_r\big(L(0)\big)$, d. h. $\big|\xi' - L(0)\big| < R$, so kann ξ' nicht in $\mathbb{R}^2 \setminus G$ liegen, weil

$$\inf_{\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus G} \big|\eta - L(0)\big| \geq R$$

ist. □

LEMMA 4.4

Sei $f : D_r(0) \to \mathbb{R}$ Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der offenen Kreisscheibe vom Radius $r > 0$ um den Ursprung. Man setzt wie im Beweis von Satz 3.2

$$\Lambda(x,y) = \big(x + \Phi(x,y), y + \Psi(x,y)\big), \quad (x,y) \in D_r(0),$$

wobei Φ, Ψ definiert sind durch

$$\partial_x \Phi = \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2}\big(1 + \partial_x f^2\big),$$

$$\partial_y \Phi = \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2}\, \partial_x f\, \partial_y f = \partial_x \Psi,$$

$$\partial_y \Psi = \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2}\big(1 + \partial_y f^2\big).$$

Dann ist Λ ein Diffeomorphismus $D_r(0) \to G := \Lambda\big(D_r(0)\big)$ mit

$$D_r\big(\Lambda(0)\big) \subset G.$$

BEWEIS

Gemäß $\partial_y \Phi = \partial_x \Psi$ findet man eine C^2–Funktion $E : D_r(0) \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla E = (\Phi, \Psi) \quad \text{auf } D_r(0).$$

Man mache dazu den Ansatz:

$$E(x,y) := \int_0^1 x\, \Phi(tx, ty) + y\, \Psi(tx, ty)\, dt, \quad (\text{o. E. } E(0) = 0)$$

und rechne — mit $\partial_y \Phi = \partial_x \Psi$ — nach, dass $\nabla E = (\Phi, \Psi)$ gilt.
Nachzurechnen ist die positive Definitheit von $D^2 E$:

$$\partial_x^2 E = \partial_x \Phi = \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2}\big(1 + \partial_x f^2\big),$$

$$\partial_x \partial_y E = \partial_y \Phi = \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2}\, \partial_x f\, \partial_y f = \partial_x \Psi = \partial_y \partial_x E,$$

$$\partial_y^2 E = \partial_y \Psi = \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2}\big(1 + \partial_y f^2\big),$$

so dass für $\eta := (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ folgt:

$$\begin{aligned} D^2 E(\eta, \eta) &= \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2}\Big[\eta_1^2\,\big(1 + \partial_x f^2\big) + 2\eta_1\eta_2\, \partial_x f\, \partial_y f + \eta_2^2\big(1 + \partial_y f^2\big)\Big] \\ &\geq \big(1 + |\nabla f|^2\big)^{-1/2}\, |\eta|^2 \end{aligned}$$

gemäß

$$\left|2\eta_1\eta_2\,\partial_x f\,\partial_y f\right| \le \eta_1^2\,\partial_x f^2 + \eta_2^2\,\partial_x f^2.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.3. □

BEWEIS VON SATZ 4.1

Sei Λ wie in Lemma 4.4, wobei jetzt der Definitionsbereich von Λ die ganze Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist, und aus Lemma 4.3 folgt, dass Λ ein Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist. Dem Beweis von Satz 3.2 entnehmen wir weiter: Die Abbildung

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \big(\Lambda^{-1}(z),\, f\circ\Lambda^{-1}(z)\big) =: F(z) \in \mathbb{C}$$

(mit $z := x + iy = (x,y)$) ist eine konforme Parametrisierung von $S = G_f$. Nach Lemma 3.3 sind

$$\phi_k(z) := \partial_x F^k(z) - i\,\partial_y F^k(z), \quad k = 1,2,3,$$

auf $\mathbb{C}$ holomorph mit

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\big(\overline{\phi_1}\phi_2\big)(z) &= \partial_x F^2(z)\,\partial_y F^1(z) - \partial_x F^1(z)\,\partial_y F^2(z) = -\det D(F^1,F^2)(z)\\ &= -\det D\Lambda^{-1}(z) = -\frac{1}{\det D\Lambda\big(\Lambda^{-1}(z)\big)} < 0,\end{aligned}$$

wobei die Positivität der Funktionaldeterminante von Λ benutzt wurde.
Speziell sind ϕ_1, ϕ_2 nullstellenfrei und es ist

$$\operatorname{Im}\big(\phi_2/\phi_1\big) = \left|\phi_1\right|^{-2}\operatorname{Im}\big(\overline{\phi_1}\phi_2\big) < 0,$$

so dass $\psi := \phi_2/\phi_1$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist und Imaginärteil < 0 hat. Folglich ist ϕ_2/ϕ_1 nach einer Variante des Satzes Liouville konstant:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{-i\psi(z)} = e^{-i\operatorname{Re}\psi(z)}\,e^{\operatorname{Im}\psi(z)\big)}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und durch 1 beschränkt, also konstant. Das ergibt

$$0 = \frac{d}{dz}\,e^{-i\psi(z)} = -i\,\frac{d}{dz}\,\psi(z)\,e^{-i\psi(z)},$$

und da exp ohne Nullstelle ist, folgt $\frac{d}{dz}\,\psi(z) = 0$, mithin ist (wegen $\operatorname{Im}\psi < 0$)

$$\phi_2 = c\,\phi_1, \quad c = a - ib,\ b > 0.$$

Dies kann man schreiben als

$$\partial_x F^2 = a\,\partial_x F^1 - b\,\partial_y F^1, \quad \partial_y F^2 = b\,\partial_x F^1 + a\,\partial_y F^1.$$

Führt man die Koordinatentransformation $T := T^1 + iT^2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$T^1(\zeta) := \xi, \quad T^2(\zeta) := \frac{\eta - a\,\xi}{b} \quad (\zeta := \xi + i\eta)$$

ein und betrachtet $V := V^1 + iV^2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$V^1(z) := T^1\circ(F^1,F^2)(z), \quad V^2(z) = T^2\circ(F^1,F^2)(z) \quad (z := x + iy),$$

so folgt $\partial_x V^1 = \partial_x F^1$ und

$$\partial_y V^2 = \partial_y \Big(b^{-1} \big(F^2 - a\, F^1 \big) \Big) = b^{-1}\, \partial_y F^2 - ab^{-1}\, \partial_y F^1 = \partial_x F^1,$$

also $\partial_x V^1 = \partial_x V^2$, und analog sieht man $\partial_y V^1 = -\partial_x V^2$. Also ist $V : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Damit rechnet man leicht nach, dass $\tilde{F} := F \circ V^{-1}$ ebenfalls konforme Parameterdarstellung von G_f ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^1(z) &= \big(F^1 \circ \big(T \circ (F^1, F^2) \big)^{-1} \big)(z) \\ &= \big(F^1 \circ (F^1, F^2)^{-1} \big) \big(T^{-1}(z) \big) \\ &= \big(F^1 \circ (F^1, F^2) \big) \big(x + i(ax + by) \big) = x, \\ F^2(z) &= ax + by, \end{aligned}$$

mithin haben wir jetzt eine konforme Parametrisierung vom Typ

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \big(\operatorname{Re} z, a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z, \tilde{F}^3(z) \big).$$

Bildet man die dazu gemäß Lemma 3.3 gehörigen holomorphen Funktionen $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3$, so folgt sofort

$$\tilde{\phi}_1 = \text{const}, \quad \tilde{\phi}_2 = \text{const} \quad \text{in } \mathbb{C}$$

und aus $\sum_k \tilde{\phi}_k^2 = 0$ folgt $\tilde{\phi}_3^2 \equiv \text{const}$ in $\mathbb{C}$. Ist diese letzte Konstante 0, so folgt $\tilde{\phi}_3 = 0$. Andernfalls hat $\tilde{\phi}_3$ keine Nullstelle. Durch Ableiten der Gleichung $\tilde{\phi}_3^2 \equiv \text{const}$ folgt $\frac{d}{dz} \tilde{\phi}_3 = 0$, also in jedem Fall $\tilde{\phi}_3 = \text{const}$. Gemäß

$$\tilde{\phi}_3 = \partial_x F^3 - i\, \partial_y F^3$$

ist dann $\nabla F^3 \in \mathbb{R}^2$ (schreibe jetzt wieder (x, y) statt z) ein konstanter Vektor, und wir können schreiben

$$F^3(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

mit Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, d. h. es ist

$$\begin{aligned} G_f &= \big\{ (x, ax + by, \alpha x + \beta y + \gamma) \ : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \big\} \\ &= \Big\{ \big(x, y, \alpha x + \beta b^{-1} (y - ax) + \gamma \big);\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big\}, \end{aligned}$$

woraus man $f(x, y) = \big(\alpha - \beta\, ab^{-1} \big)\, x + \beta\, b^{-1} y + \gamma$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ abliest. □

KOROLLAR

Eine beschränkte ganze Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleich ist konstant. (Denn die Konstanten sind die einzigen beschränkten affin–linearen Funktionen.)