Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 11

1. Juni 2010

Kapitel 9. Matrizen und Determinanten

§9.6 Determinanten (Fortsetzung)

Satz 62. (Determinanten von Dreiecksmatrizen)

Es sei A eine obere oder untere $n \times n$-Dreiecksmatrix. Dann ist die Determinante von A gegeben durch

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

d.h. die Determinante von A entspricht dem Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente.

Satz 63. (Rechenregeln für Determinanten)

Es sei A eine $n \times n$-Matrix.

- *Multiplizieren wir eine Zeile (oder Spalte) der Matrix A mit dem Faktor $c \in \mathbb{R}$, so ändert sich dabei die Determinante um das c-fache.*
  Insbesondere gilt: Die Determinante des c-fachen der Matrix A ist das c^n-fache der Determinante von A, oder kurz
  $$\det(c \cdot A) = c^n \cdot \det A.$$

Satz 63. (Fortsetzung)

- *Vertauscht man zwei Zeilen (Spalten) einer Matrix, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.*

  Bezeichnen s_i bzw. z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ die Spalten bzw. die Zeilen von A, so gilt also

$$\det(s_1, \ldots, \mathbf{s}_i, \ldots, \mathbf{s}_j, \ldots, s_n) \\ = -\det(s_1, \ldots, \mathbf{s}_j, \ldots, \mathbf{s}_i, \ldots, s_n)$$

und

Satz 63. (Fortsetzung)

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_i \\ \vdots \\ \mathbf{z}_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_j \\ \vdots \\ \mathbf{z}_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Satz 63. (Fortsetzung)

- *Der Wert von* $\det A$ *ändert sich nicht, wenn man eine Zeile (Spalte) ersetzt durch die Zeile (Spalte) plus eine Linearkombination der anderen Zeilen (Spalten) von* A*.*

  Insbesondere darf man zu Zeilen (Spalten) das Vielfache anderer Zeilen (Spalten) dazuaddieren, ohne den Wert der Determinante zu verändern.

- *Die Determinanten von* A *und* A^T *sind gleich, d.h.*

$$\det A = \det A^T.$$

Satz 63. (Fortsetzung)

- *Zeilen und Spalten der Matrix A sind genau dann linear abhängig, wenn*

  $$\det A = 0.$$

  Äquivalent dazu ist: Genau dann ist $\det A \neq 0$*, wenn die Zeilen und Spalten von A linear unabhängig sind.*

- *Für zwei* $n \times n$*-Matrizen A und B gilt*

  $$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

§9.7 Ergänzendes zu quadratischen Matrizen

Satz 64. (Eindeutige Lösbarkeit und Determinante)

Gegeben sei das quadratische lineare Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit einer $n \times n$-Matrix A und einer rechten Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Dieses LGS ist genau dann für **jede** *rechte Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar, wenn für die Determinante gilt*

$$\boxed{\det A \neq 0}.$$

Liegt eine quadratisches lineares Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit einer quadratischen $n \times n$-Matrix A und $\det A \neq 0$ vor, so ist das LGS nach dem Satz 64 für jede rechte Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.

Daraus folgt, dass der Wertebereich der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

dem ganzen $\mathbb{R}^n$ entspricht.

- Wegen der Eindeutigkeit der Lösung $\vec{x}$ ist die Funktion f umkehrbar.
- Man kann zeigen, dass die Umkehrabbildung f^{-1} wieder linear ist und durch eine Matrix beschrieben wird.
- Diese Matrix wird mit

$$A^{-1}$$

notiert und als inverse Matrix oder kurz als Inverse von A bezeichnet, d.h. es ist

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f^{-1}(\vec{y}) = A^{-1}\vec{y}.$$

Frage:

Welche Eigenschaften muss die Matrix besitzen, um die Umkehrabbildung f^{-1} darstellen zu können?

Für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\left(f(\vec{x})\right) = \vec{x} \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1} f(\vec{x}) = \vec{x} \\
&\Leftrightarrow \quad A^{-1} A\vec{x} = \vec{x} = E_n \vec{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(A^{-1} A - E_n\right) \vec{x} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot A = E_n.
\end{aligned}
$$

Genau so zeigt man die umgekehrte Gleichung

$$A \cdot A^{-1} = E_n.$$

Definition 93.

Die Inverse A^{-1} ist die Matrix, welche - von links oder von rechts an A heranmultipliziert - im Produkt mit A die Einheitsmatrix E_n ergibt.

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n}.$$

Bemerkung.

Nur die Matrizen mit $\det A \neq 0$ besitzen eine Inverse. Solche Matrizen heißen folglich invertierbar oder regulär.

Zumindest theoretisch lässt sich im Fall der Existenz von A^{-1} auch die eindeutig bestimmte Lösung des LGS

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

explizit angeben:

Denn es ist nach linksseitiger Multiplikation von A^{-1} auf beiden Seiten der Gleichung

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad E_n \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Somit ist

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}}$$

eine Lösung und wegen der Eindeutigkeit auch die Lösung des LGS.

Praxis-Hinweis

- Tatsächlich existieren verschiedene Rechenverfahren, um zu einer gegebenen invertierbaren Matrix A deren Inverse zu bestimmen.
- Doch ist der praktische Nutzen äußerst gering.
- Für die Lösung LGS existieren jedoch Berechnungsverfahren, die in Sachen Effizienz, Rechengenauigkeit sowie Geschwindigkeit die Verfahren zur Inversen-Berechnung um Längen schlagen.

Satz 65. (Quadratische Matrizen)

Es sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

1. *Es ist $\det A \neq 0$.*
2. *Die Matrix A ist invertierbar (regulär), d.h. es existiert A^{-1}.*
3. *Sowohl die n Spalten als auch die n Zeilen von A sind linear unabhängig.*

Satz 65. (Fortsetzung)

$\boxed{4.}$ *Das lineare Gleichungssystem*

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

besitzt für jede rechte Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ *eine eindeutige Lösung* $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Satz 65. (Fortsetzung)

5. *Das homogene lineare Gleichungssystem*

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

besitzt genau eine Lösung, und zwar die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

6. *Die lineare Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

ist umkehrbar.

Gilt für die Determinante einer quadratischen $n \times n$-Matrix A

$$\det A = 0,$$

so gilt ferner der nachfolgende charakteristische Satz, der ausschließt, dass wir es in diesem Fall bei dem linearen Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit einer eindeutigen Lösung zu tun haben.

Satz 66. (Quadratische Matrizen und LGS)

Gegeben sei die quadratische matrix A mit $\det A = 0$ *sowie das lineare Gleichungssystem*

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

- *Dann besitzt dieses LGS entweder keine oder unendlich viele Lösungen.*
- *Ist insbesondere das Gleichungssystem homogen, also* $\vec{b} = \vec{0}$, *so ist zusätzlich der Fall ausgeschlossen, dass es keine Lösungen gibt (denn* $\vec{x} = \vec{0}$ *ist eine offensichtliche Lösung), und wir haben es mit unendlich vielen Lösungen zu tun.*

Kapitel 10. Lineare Gleichungssysteme

§10.1 Das Gauß'sche Eliminationsverfahren

Parallel zu der ausführlichen Schreibweise

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

eines lineares $m \times n$-Gleuchungssystems mit der rechten Seite

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

wollen wir uns in diesem Kapitel vermehrt auch der Kurzschreibweise

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{10.1.1}$$

bedienen, in welcher die Variablen x_1 bis x_n ncht mehr explizit auftreten. Die Gesamtheit aller Einträge links der vertikalen Trennlinie in (10.1.1) wollen wir als die linke Seite bezeichen.

Die unter dem Namen Gauß'sches Eliminationsverfahren oder auch kurz Gauß-Verfahren bekannte Methode zur Lösung LGS bedient sich des folgenden Grundprinzips:

Ausgehend von einem gegebenen LGS wird dieses in einer Reihe äquivalenter Umformungen auf eine Gestalt gebracht, die letztendlich leichter zu lösen ist.

Äquivalent ist eine Umformung (Transformation), wenn sie die Lösungsgesamtheit des Systems nicht verändert. So dürfen wir beispielweise

- Zeilen eines LGS oder Spalten der linken Seite vertauschen.
- Zeilen eines LGS mit einem Faktor multiplizieren.
- Eine Zeile eines LGS ersetzen durch eine Zeile selbst plus dem Vielfachen einer anderen Zeile.

Ausschließlich mit diesen Mitteln wollen wir Schema (10.1.1) in eine Schema von allgemeiner rechter oberer Dreiecksgestalt bringen.

Unterhalb der Diagonalen

$$d_{11}, d_{22}, \dots$$

sollen nur Nullen zu finden sein, oberhalb davon beliebige Einträge.

Ist etwa $m \geqslant n$, so streben wir also ein Schema der Form

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
d_{11} & \star & \star & \dots & \star & c_1 \\
0 & d_{22} & \star & \dots & \star & c_2 \\
0 & 0 & d_{33} & \dots & \star & c_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} & c_n \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_m
\end{array}\right) \tag{10.1.2}$$

an mit Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen sowie einer transformierten rechten Seite $c_1, \dots, c_m$.

Bemerkung.

Wenn wir im Folgenden die Zeile i dieses Schemas ersetzen durch das c-fache dieser Zeile plus dem d-fachen einer anderen Zeile j, machen wir dies deutlich, indem wir die neue Zeile schreiben als

$$(i) \quad \rightarrow \quad c \cdot (i) + d \cdot (j).$$

Praxis-Hinweis

- Während der Durchführung des Gauß-Verfahrens wird es gelegentlich notwendig oder zumindest empfehlenswert sein, zwei Zeilen des LGS oder zwei Spalten der linken Seite gegeneinander zu vertauschen.
- Das Vertauschen zweier Zeilen ist praktisch problemlos, handelt es sich dabei doch lediglich um das Vertauschen zweier Gleichungen eines Systems, bei dem die Reihenfolge der Gleichungen keine Rolle spielt.
- Vertauscht man jedoch zwei Spalten der linken Seite, so ist Vorsicht geboten. In der originären Schreibweise eines LGS ist dieses Vertauschen unbedenklich, da hier die Variablenzeicher mitgeführt werden.

Beispiel 10.1.1

Man betrachte etwa das LGS

$$\begin{array}{ccccccc} 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 3 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1. \end{array}$$

Um in der ersten Spalte der Ersten Zeile eine 1 zu erhalten (was rechentechnische Vorteile mit sich bringt), sind Zeilenvertauschungen ungeeignet.

Hingegen liefert ein Vertauschen der ersten und dritten Spalten:

Beispiel 10.1.1 (Fortsetzung)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_3 & + & 3x_2 & + & 5x_1 & = & 2 \\ 7x_3 & + & 3x_2 & + & 3x_1 & = & 3 \\ -x_3 & + & 2x_2 & + & 6x_1 & = & 1. \end{array}$$

Verwendet man jedoch die vereinfachende Schreibweise

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 5 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

so kann dies nach Vertauschen der ersten und dritten Spalte leicht zu einer Verwechslung von x_1 und x_3 führen.

Beispiel 10.1.1 (Fortsetzung)

Um dieses Problem zu vermeiden, bietet es sich ggf. an, die zu den Spalten gehörenden Variablen in der Kopfzeile des Schemas mitzunotieren, etwa in der Form

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{bzw.} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 & \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right).$$

Nachdem wir das Ausgangs-LGS auf eine obere Dreiecksgestalt (10.1.2) gebracht haben, hängt das weitere Vorgehen wesentlich ab von den Dimensionen des LGS, also der Anzahl seiner Zeilen und Spalten.

Wir unterscheiden daher im Folgenden drei Fälle:

1. Quadratische LGS $\boxed{m = n}$
2. Unterbestimmte LGS $\boxed{m < n}$
3. Überbestimmte LGS $\boxed{m > n}$.

Quadratische LGS $(m = n)$

Nachdem wir im Fall gleicher Zeilen- und Spaltenanzahl das LGS auf die ober Dreiecksgestalt gebracht und das Schema

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} d_{11} & \star & \star & \dots & \star & c_1 \\ 0 & d_{22} & \star & \dots & \star & c_2 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & \star & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} & c_n \end{array}\right)$$

erhalten haben, können wir das LGS auf Lösbarkeit untersuchen und die Lösungen berechnen.

Quadratische LGS $(m = n)$ (Fortsetzung)

Wir unterscheiden:

1) Eine eindeutige Lösung liegt genau dann vor, wenn alle Hauptdiagonalelemente $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$ von Null verschieden sind.

   In diesem Fall ermitteln wir die Lösung durch sukzessives Ausrechnen „von unten nach oben" .