Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 13

10. Juni 2010

Kapitel 10. Lineare Gleichungssysteme

§10.3 Zur Lösungsgesamtheit linearer Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt untersuchen wir, welche Struktur die Gesamtheit aller Lösungen eines linearen Gleichungssystems besitzt.

Die Lösungsgesamtheit eines LGS wollen wir in diesem Abschnitt auch als dessen allgemeine Lösung bezeichnen.

Satz 68. (Lösungsgesamtheit inhomogener LGS)

Gegeben sei ein inhomogenes lineares $m \times n$-Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit einer gegebenen $m \times n$-Matrix A und einer rechten Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann lässt sich die allgemeine Lösung dieses Problems darstellen durch

eine beliebige spezielle Lösung des LGS

$$+$$

die allgemeine Lösung des entsprechenden homogenen LGS

$$A\vec{x} = \vec{0}.$$

Beim Lösen eines inhomogenen LGS

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit einer $m \times n$-Matrix A und einer rechten Seite $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ stoßen wir im Fall seiner Lösbarkeit auf die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \vec{y} + p_1 \cdot \vec{r}_1 + \cdots + p_j \cdot \vec{r}_j \qquad (p_1, \ldots, p_j \in \mathbb{R})$$

mit einem Vektor $\vec{y}$ und anderen Vektoren $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^n$.

Schreiben wir die allgemeine Lösung sodann in der Form

$$\vec{x} = \vec{y} + Span\left\{\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n\right\},$$

so erkennen wir, um was es sich bei der allgemeinen Lösung des inhomogenen LGS handelt, nämlich um einen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Für den Fall $n = 3$, d.h. für den Fall eines LGS mit m Zeilen und drei Unbekannten, wollen wir eine geometrische Interpretation der allgemeinen Lösung zu finden.

Jede der m Zeilen

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 = b_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)$$

des LGS stellteine Ebene im $\mathbb{R}^3$ dar, falls die a_{ij} nicht alle zu Null verschwinden.

Die Suche nach der allgemeinen Lösung des LGS entspricht somit der Suche nach denjenigen Punkten $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die in allen m Ebenen liegen.

Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, beschränken wir uns zusätzlich auf $m = 3$.

Beim Lösen solcher 3×3-LGS haben wir folglich drei Ebenen zum Schnitt zu bringen.

Ist das LGS unlösbar, so entspricht dies die drei Ebenen, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen, was beispielweise anhand des LGS

$$\begin{array}{ccccccr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -3. \end{array}$$

Die drei Ebenen dieses LGS liegen parallel und besitzen demzufolge keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

Unlösbares LGS im Fall paralleler Ebenen.

Doch auch, wenn die Ebenen nicht parallel liegen, kann der Fall entreten, dass diese sich in keinem gemeisamen Punkt schneiden.

So ist das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 6. \end{array}$$

nicht lösbar.

Die drei Ebenen dieses LGS besitzen augenscheinlich keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

Unlösbares LGS.

Ist das LGS hingegen lösbar, so entspricht das Schnittgebilde der drei Ebenen

- einem einzigen Punkt,
- einer Gerade
- oder gar einer Ebene.

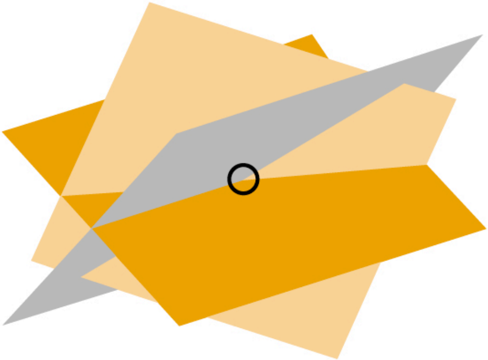
1. Das LGS besitzt eine eindeutige Lösung $\vec{x}$.

Dies entspricht dem Fall, dass sich alle drei Ebenen in genau einem Punkt, dem Punkt $\vec{x}$ schneiden.

Ein Beispiel hierfür ist gegeben durch das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1. \end{array}$$

Eine kurze Rechnung ergubt, dass es die eindeutige Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ besitzt.



Eindeutige Lösung – genau ein Schnittpunkt.

2. Das LGS ist nicht eindeutig lösbar und erfordert die Einführung genau eines Parameters p_1.

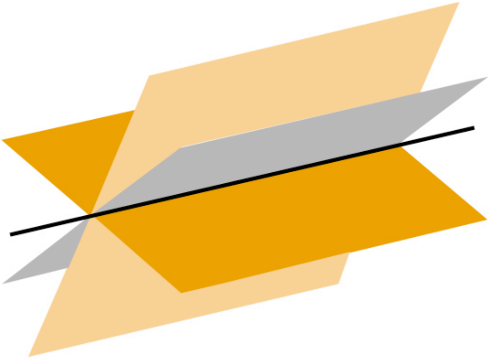
Die allgemeine Lösung des LGS entspricht dann dem affinen Unterraum

$$\vec{y} + Span\left\{\vec{r}_1\right\} = \left\{\vec{y} + p_1 \cdot \vec{r}_1 \mid p_1 \in \mathbb{R}\right\},$$

welcher eine Gerade repräsentiert.

Ein Beispiel hierfür ist gegeben durch das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3. \end{array}$$



Schnittgerade.

3. Das LGS ist nicht eindeutig lösbar und erfordert die Einführung genau zweier Parameter p_1 und p_2.

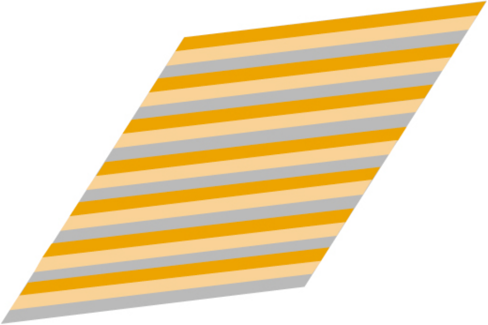
Die allgemeine Lösung des LGS entspricht dann dem affinen Unterraum

$$\vec{y} + Span\,\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\} = \{\vec{y} + p_1 \cdot \vec{r}_1 + p_2 \cdot \vec{r}_2 \mid p_1, p_2 \in \mathbb{R}\}\,,$$

welcher eine Ebene repräsentiert. Der Fall dreier Ebenen, welche sich in einer Ebene schneiden, tritt nur dann ein, wenn alle drei Ebenen dieselbe Fläche beschreiben, also zusammenfallen.

Ein Beispiel hierfür ist gegeben durch das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 3. \end{array}$$



Gemeinsame Schnittebene

§10.4 Ergänzung: Kurzanleitung zum Gauß'schen Eliminationsverfahren

1. Schritt: Abbruchkriterium

Enthält eine Zeile auf der linken Seite ausschileßlich Nullen, auf der rechten Seite jedoch einen Wert ungleich Null, so besitzt das LGS keine Lösung.

In diesem Fall müssen wir das Verfahren abbrechen.

2. Schritt: Zeilen und Spaltenvertauchungen

Handelt es sich bei dem Eintrag in der ersten Spalte der ersten Zeile (oben links) um den Wert **Null**,

so **müssen** wir die erste Zeile (bzw. die erste Spalte der linken Seite) mit einer anderen Zeile (Spalte der linken Seite) vertauschen,

um oben links einen Eintrag ungleich **Null** zu erhalten.

3. Schritt: Zeilentransformationen

- Die erste Zeile bleibt während dieses Schritts unverändert.
- Sie dient dazu, durch Multiplikation mit einem geeigneten Vielfachen und Addition auf andere Zeilen deren jeweils ersten Eintrag auf den Wert **Null** zu bringen.
- Eine Zeile, deren erster Eintrag bereits den Wert **Null** besitzt, lassen wir unverändert.
- Man versäume auf keinen Fall, die im Zuge dieses Verfahrens anfallenden Operationen wie Addition und Vervielfachung auch auf die rechte Seite anzuwenden. Besteht diese aus dem Nullvektor (liegt also ein homogenes System vor), so ist dies trivialerweise nicht nötig.

4. Scritt: Kontrolle

- Eine Zeile, die jetzt nur noch aus Nullen besteht (einschließlich des Eintrags auf der rechten Seite), wird gestrichen und bleibt damit im weiteren Verlauf des Verfahrens unberücksichtigt.
- Liegt eine Zeile vor mit Nullen auf der linken und einem von Null verschiedenen Eintrag auf der rechten Seite, dann besitzt das Gleichungssystem keine Lösung und wir brechen das Verfahren ab.

  Im Fall eines homogenen Gleichungssystems kann dieser Fall nicht auftreten, da im gesamten Verfahren die rechte Seite aus dem Nullvektor besteht.

Wiederholung der Schritte 1 bis 4 für Unterschema

- Die erste (oberste) Zeile und die erste (linke) Spalte werden jetzt „eingefroren“. Bis auf ggf. Vertauschen von Spalten werden wir sie nicht mehr verändern.
- Wir betrachten nun das „Unterschema“, beginnend mit der zweiten Zeile und der zweiten Spalte, als das zu bearbeitende System.

  Für diese Unterschema wiederholen wir die oben beschriebenen Schritte 1 bis 4.

Wiederholung der Schritte 1 bis 4 für Unterschema

- Handelt es sich bei den Gleichungssystemen um Systeme mit allgemein m Gleichungen und n Unbekannten, so wiederholen wir die Schritte 1 bis 4 fortlaufend weitere Male, wobei sowohl die Anzahl der Gleichungen als auch die Anzahl der Unbekannten in jedem Schritt um eins nach unten reduziert wird.

  Nach endlich viele Schritten kann dann kein neues Unterschema mehr gebildet werden und wir fahren mit der folgenden Schlussanalyse fort.

Letzer Schritt: Analyse

Wir unterscheiden nun:

a. Die linke Seite besitze die gleiche Anzahl n von Zeilen wie Spalten. Dann besitzt das LGS eine eindeutige Lösung, die „von unten nach oben“ berechnet wird.

b. Die linke Seite besitze um d weniger Zeilen als Spalten. Dann können wir die Werte für d Variablen frei wählen (parametrisieren) und die übrigen Variablen in Abhängigkeit dieser Parameter darstellen.

   Für die Parametrisierung wählen wir üblicherweise die Variablen, die den letzen d Spalten der linken Seite entsprechen.

Letzer Schritt: Analyse

$\boxed{c.}$ Der Fall, dass am Ende der vorangegangenen Schritte die linke Seite mehr Zeilen aufweist als Spalten, kann nicht auftreten.

Denn entweder ergeben sich durch die obigen Schritte kompltte Nullzeilen, die entfernt werden können.

Oder aber die linke Seite einer Zeile beinhaltet Nullen, wohingegen die rechte Seite in dieser Zeile einen Wert ungleich Null aufweist. In diesem Fall bricht das Verfahren ab; das LGS besitzt dann keine Lösung.