Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 14

15. Juni 2010

Kapitel 11. Eigenwertrechnung

§11.1 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Eine quadratische $n \times n$-Matrix A verbirgt eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

Vektoren des $\mathbb{R}^n$ werden dabei wieder auf Vektoren des $\mathbb{R}^n$ abgebildet.

In diesem Kapitel interressieren wir uns für Vektoren, die auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet werden, für welche also die Gleichung

$$\boxed{A\vec{x} = \lambda\vec{x}}$$

mit einem Vielfachen $\lambda \in \mathbb{R}$ und einem Vektor $\vec{x}$ erfüllt ist.

Da der Nullvektor $\vec{0}$ dieser Gleichung für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ genügt, wollen wir ihn im Folgenden von unseren Betrachtungen ausschileßen.

Definition 94.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche die Gleichung

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

zusammen mit einem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ erfüllt ist, heißt

Eigenwert der Matrix A

und der Vektor $\vec{x}$ ein zugehöriger

Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Frage:

Wie lassen sich Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix A berechnen?

Stellen wir zunächst fest, dass Gleichung

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

genau dann für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - \left\{\vec{0}\right\}$ erfüllt ist, wenn die äquivalente Gleichung

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \qquad \text{bzw.} \qquad (A - \lambda E_n)\,\vec{x} = \vec{0}$$

erfüllt ist.

- $$(A - \lambda E_n)\,\vec{x} = \vec{0}$$

  stellt ein homogenes LGS dar, von welchem wir verlangen, dass es eine nichttriviale Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ besitzt.

- Ein homogenes quadratisches LGS

  $$M\vec{x} = \vec{0}$$

  genau dann nur die triviale Lösung besitzt, wenn die Determinante von *M* ungleich Null ist.

- Fordern wir nun umgekehrt eine nichttriviale Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$, so muss die Determinante folglich verschwinden.

In unserem Fall ist die Gleichung

$$(A - \lambda E_n)\,\vec{x} = \vec{0}$$

somit äquivalent zur Bedingung

$$\boxed{\det(A - \lambda E_n) = 0},$$

oder ausgeschrieben

$$\boxed{p(\lambda) := \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0}.$$

Diese Gleichung stellt ein Polynom vom Grad n in der Unbekannten λ dar!

Bemerkungen.

- Das Polynom $p(\lambda)$ wird als charakteristische Polynom von A bezeichnet undin der Literatur verbreitet auch mit $\chi(\lambda)$ statt $p(\lambda)$ benannt.
- $p(\lambda)$ ist ein Polynom von Grad n. Die Nullstellen desselben sind folglich nur für $n = 2$ (und leidlich auch für $n = 3$) in jedem Fall exakt zu bestimmen. In Speziallfällen gelingt dies auch bei höherem n. Im Allgeneinen bleibt jedoch in diesem Fall nur der Ausweg, die Nullstellen numerisch zu berechnen.
- Hinter der Bestimmung des charakteristischen Polynoms steckt nicht anders als die Berechnung einer (von einem Parameter λ abhängigen) Determinante.

Reelle Polynome - unabhängig von ihrem Grad - müssen nicht zwangsläufig auch reelle Nullstellen besitzen.

Besitzt das charakteristische Polynom komplexe Nullstellen, so müssen wir die Eigenwerttheorie ausdehnen.

Statt $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ haben wir in Gleichung

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ und $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ zuzulassen. Es besteht dabei die Raum $\mathbb{C}^n$ aus der Menge aller Vektoren

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mit komplexen Einträgen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Die reelle Matrix A muss dann mit einer Abbildung vom $\mathbb{C}^n$ in den $\mathbb{C}^n$ in Verbindung gebracht werden.

Bemerkung.

Allgemein wird ein Eigenwert $a \in \mathbb{C}$ ein *m-facher Eigenwert* (oder ein Eigenwert der Vielfachheit m) genannt, wenn der Faktor

$$(\lambda - a)$$

im charakteristischen Polynom $p(\lambda)$ in der m-ten Potenz auftritt.

Frage:

Wie ermitteln wir nun jeweils die zum Eigenwert λ gehörenden Eigenvektoren?

Erinnern wir uns daran, dass für Eigenvektoren $\vec{x}$ zum Eigenwert λ die Beziehung

$$(A - \lambda E_n)\,\vec{x} = \vec{0}$$

erfüllt sein muss.

Ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ ist folglich genau dann ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, wenn er eine Lösung des homogenes LGS

$$(A - \lambda E_n)\,\vec{x} = \vec{0}$$

ist.

Da für dies gilt

$$\det\,(A - \lambda E_n) = 0,$$

existieren hierfür unendlich viele Lösungen.

Bemerkung.

Die Menge der Eigenvektoren bildet zusammen mit dem Nullvektor folglich einen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$, der auch als Eigenraum von A zum Eigenwert λ bezeichnet wird.

Bemerkungen.

- Besonders einfach gestaltet sich die Eigenwertrechnung im Fall von rechten oberen bzw. linken unteren Dreiecksmatrizen. Denn beispielsweise für eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

berechnen wir das charakteristische Polynom von A zu:

$$p(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda).$$

Die n Eigenwerte ist somit gegeben durch $\lambda_1 = a_{11}, \dots, \lambda_n = a_{nn}$.

Bemerkungen (Fortsetzung)

- Genau dann ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert der quadratischen Matrix A, wenn wir im charakteristischen Polynom die Unbekannte λ ausklammern können.

  Wie ist ein Eigenwert $\lambda = 0$ interpretieren?

  Dies beinhaltet die Existenz eines nichttrivialen Vektors $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit
  $$A\vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

  Das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ besitzt also eine nichttriviale Lösung. Dies ist äquivalent zur Nichtregularität der Matrix A bzw. zu
  $$\det A = 0.$$

Bemerkungen (Fortsetzung)

- Eigenwerte spielen eine große Rolle bei der Analyse naturwissenschaftlicher Vorgänge wie beispielweise der Klassifizierung und Lösung von Differentialgleichungen sowie der Beschreibung quantenmechanicher Messungen.

Teil III

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Kapitel 12. Grundlagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

§12.1 Klassifizierung von (skalaren) Differentialgleichungen

Treten in einer Gleichung außer den unabhängigen Variablen

$$x_1, \ldots, x_n$$

einer reellwertigen Funktion und dem Funktionswert

$$y(x_1, \ldots, x_n)$$

auch eine oder mehrere Ableitungen der Funktion nach einer oder mehreren Variablen auf, so sprechen wir von einer (skalaren) Differentialgleichung.

Unsere Aufgabe soll es sein, die (im Allgemeinen unendlich vielen) Lösungen einer Differentialgleichung zu finden, also all die Funktionen

$$y = y(x)$$

zu bestimmen, welche eine DG erfüllen.

Nach der Anzahl der auftretenden Variablen, der Ordnung der auftretenden Ableitungen und der Form der Gleichung unterscheiden wir:

- <u>Gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen:</u>

  Eine gewöhnliche DG enthält Terme in einer einzigen reellen Variablen x, einer Funktion $y(x)$ dieser Variablen sowie deren (gewöhnlichen) Ableitung(en)

  $$y'(x),\ y''(x), \dots$$

  Eine partielle DG enthält mehrere Variablen $x_1, \dots, x_n$, eine Funktion $y(x_1, \dots, x_n)$ dieser Variablen sowie deren partielle Ableitungen.

- DG in expliziter oder in impliziter Darstellung:

  Die implizite Darstellung einer gewöhnlichen DG besitzt die Gestalt
  $$f(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$
  Die implizite Gestalt ist die allgemeinste und oft die am einfachsten herzustellende Form einer DG.

  Im Gegensatz dazu ist im Fall einer gewöhnlichen DG in expliziter Darstellung
  $$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$
  die DG nach der höchsten auftretenden Ableitung aufgelöst; eine solche Darstellung ist nicht immer möglich.

- DG verschiedener Ordnung:

  Die höchste auftretende Ableitung bestimmt die Ordnung der DG.

Bemerkung.

Die n-te Ableitung an der Stelle x wird in einer gewöhnlichen expliziten DG n-ter Ordnung also durch einen Ausdruck (eine Funktion) von x, dem Funktioneswert $y(x)$ sowie den Ableitungen $y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ beschrieben.

Der Ausdruck

$$f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

wird auch als die rechte Seite der DG bezeichnet.