Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 15

22. Juni 2010

Kapitel 12. Grundlagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

§12.2 Der Lösungsbegriff

Um eventuellen Missverständnissen vorzubeugen, ist es erforderlich, den Begriff der Lösung einer DG genauer zu präzisieren.

Wir beschränken uns hier auf explizite gewöhnliche DG, da wir uns hauptsächlich mit diesem Typ von DG beschäftigen wollen.

Definition 95.

Unter des Definitionsbereichs einer DG versteht man den Definitionsbereich der rechten Seite

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

der DG, also eine Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$.

In ihm finden sich alle Punkte des $\mathbb{R}^{n+1}$, für welche die rechte Seite f definiert ist.

Praxis-Hinweis

Ähnlich wie im Fall von Funktionen kann es manchmal sinnvoll sein, den Definitionsbereich einer DG auf einen kleineren Teilbereich des mathematisch Möglichen einzuschränken.

Die Günde hierfür können zum einen innermathematische sein.

Nur durch Zusatzbedingungen etwa kann bisweilen die Korrektheit eines Verfahrens garantiert werden. Zum anderen stecken hinter einer Einschränkung des Definitionsbereichs nicht selten die naturwissenschaftlichen Rahmenbedingungen eines Experiments.

Positive Messgößen bzw. eine zeitliche Interpretation von x können eine Einschränkung des Definitionsbereichs sinnvoll erscheinen lassen.

Wir wollen nun erklären, was wir unter der Lösung einer gewöhnlichen expliziten DG

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

oder kurz

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

der Ordnung n verstehen wollen.

Definition 96.

Wir bezeichnen eine Funktion $g(x)$ als Lösung oder Lösungsfunktion, wenn Folgendes gilt:

- *Die Funktion $g(x)$ ist auf einem (lückenlosen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$, genannt Lösungsintervall, definiert und dort (mindestens) n Mal differenzzierbar.*
- *Die Funktion $g(x)$ erfüllt die Differentialgleichung auf ganz I, d.h. es gilt*

$$g^{(n)}(x) = f(x, g(x), g'(x), \ldots, g^{(n-1)}(x))$$

für alle x aus dem Lösungsintervall I der Funktion $g(x)$.

Bemerkungen.

- Insbesondere muss für eine Lösung $g(x)$ der Ausdruck

$$(x, g(x), g'(x), \ldots, g^{(n-1)}(x))$$

  für alle $x \in I$ im Definitionsbereich der DG liegen.

- Zukünftig wollen wir eine Lösungsfunktion auch mit $y(x)$ statt mit $g(x)$ bezeichnen. Aus dem Zusammenhang sollte klar werden, wann es sich bei $y(x)$ nur um einen Platzhalter für einen unbekannten Ausdruck (wie in einer DG der Fall) handelt und wann sich hinter $y(x)$ eine konkrete Funktion oder eine Kurvenschar verbirgt.

Zum Schluss dieses Abschnitts sei darauf hingewiesen, dass implizite DG in mancherlei Hinsicht ein anderes Verhalten an den Tag legen als explizite:

Betrachten wir die DG

$$y' = \frac{y}{x}$$

in der nunmehr impliziten Form

$$y' \cdot x = y,$$

die wir mühelos durch Multiplikation mit x aus der expliziten Gleichung herstellen können.

Während wir im Fall der expliciten Gleichung etwa die Lösung $y = x$ auf beiden Teilintervallen $\mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R}^-$ getrennt definiert mussten, um der Definitionslücke bei $x = 0$ gerecht zu werden, liegt der Fall in der impliziten Darstellungs anders:

Hier dürften wir die Funktion $y(x) = x$ problemlos auf ganz $\mathbb{R}$ als Lösung ansehen, da diese tatsächlich in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die implizite Gleichung erfüllt.

Dies könnte zu der irrigen Vermutung führen, dass implizite Gleichungen erstrebenswert seien und eine einfachere Lösungsbehandlung möglich machten.

Im Allgemeinen jedoch ist das Gegenteil der Fall.

Implizite Darstellungen gelten als sperrig und einer theoretischen Behandlung nur sehr schwer zugänglich.

§12.3 Gewinnung von Differentialgleichungen - Beispiele

Oftmals kann der Zusammenhang zweier Naturgrößen x und y nicht direkt beobachtet werden.

Vielmehr lässt sich stattdessen lediglich ein Zusammenhang herstellen zwischen dem Änderunsverhalten $y'(x)$ der Größe $y(x)$ sowie der Variablen x andererseits.

Bemerkung.

Ein in der Natur häufig anzutreffender Fall besteht in der zeitlichen Interpretation von x.

Die unabhängige Variable x wird dann in diesem Fall meist in t umbenannt und die DG

$$y^{(n)}(t) = f(t, y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

beschreibt die zeitliche Änderung der Größe $y = y(t)$ zu einem Zeitpunkt t.

Bemerkung (Fortsetzung)

In einem solchen zeitlichen Zusammenhang verbergen sich hinter den Ableitungen $y'(t)$ und $y''(t)$ kinematische Größen:

- Die erste Ableitung

$$y'(t) = \frac{dy}{dt}(t)$$

  repräsentiert die Geschwindigkeit bzw. die zeitliche Änderung von $y(t)$;

- die zweite Ableitung

$$y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t)$$

  kann als Beschleunigung interpretiert werden.

Beispiel 12.3.1

Ein Fahrzeug bewege sich entlang einer geraden Linie mit konstanter Geschwindigkeit $v = konst$.

Es beschreibe $s(t)$ die Position des Fahrzeugs zum Zeitpunkt t.

Beispiel 12.3.1 (Fortsetzung)

In diesem Fall stimmen zu jedem Zeitpukt t die Durchschnittsgeschwindigkeiten

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \qquad (h \in \mathbb{R})$$

mit der Momentangeschwindigkeit

$$s'(t) = \frac{ds}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}(t)$$

überein und es ist

$$\boxed{s'(t) = v = konst.}$$

Beispiel 12.3.1 (Fortsetzung)

Die Lösungen dieser „Differentialgleichung" sind uns bereits bekannt. Es handelt sich um die Schar der Stammfunktionen

$$s(t) = \int v dt = vt + C \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Bereits an diesem simplen Beispiel wird der wesentliche Charakter der Lösungsgesamtheit von DG deutlich:

Die Integrationskonstante C, die hier alle reellen Werte annehmen kann, hat zur Folge, dass die DG

$$s'(t) = v = konst$$

unendlich viele Lösungen besitzt.

Beispiel 12.3.1 (Fortsetzung)

Wir wollen untersuchen, welcher Zusatzinformation es bedarf, um eine eindeutige Lösung von

$$s'(t) = v = konst$$

zu erhalten:

Ist die Startposition $s(t_0) = s_0$ zu einem Startzeitpunkt t_0 bekannt, so können wir die passende Integrationskonstante C explizit bestimmen.

Beispiel 12.3.1 (Fortsetzung)

Ist beispielweise $t_0 = 0$, so können wir feststellen

$$s(0) = v \cdot 0 + C = s_0,$$

woraus wir $C = s_0$ erhalten.

Die Lösung von

$$s'(t) = v = konst$$

unter der Zusatzinformation $s(0) = s_0$ lautet also

$$s(t) = vt + s_0.$$

Beispiel 12.3.2

Die Population n einer Art ist im Allgemeinen eine Funktion der Zeit, d.h. $n = n(t)$.

Plausibel ist dabei, dass sich in gewissen Grenzen die Population umso stärker vermehrt, je größer der gegenwärtige Bestand $n(t)$ ist (sieht man von hemmenden Effekten wie Resourcenmangel, Stress etc. ab).

Beispiel 12.3.2 (Fortsetzung)

Der momentane Zuwachs zum Zeitpunkt t ist also proportional zum Bestand $n(t)$, kurz

$$\boxed{n'(t) = k \cdot n(t)}$$

mit einer für die Art charakteristischen Konstanten $k > 0$.

Beispiel 12.3.2 (Fortsetzung)

Im Gegensatz zur DG aus Beispiel 12.3.1 ist hier nicht mit dem Auffinden einer Stammfunktion getan.

Eine einfache Integration ist nicht möglich, da auf der rechten Seite statt einem Ausdruck in t nun auch die gesuchte Größe $n(t)$ selbst auftaucht.

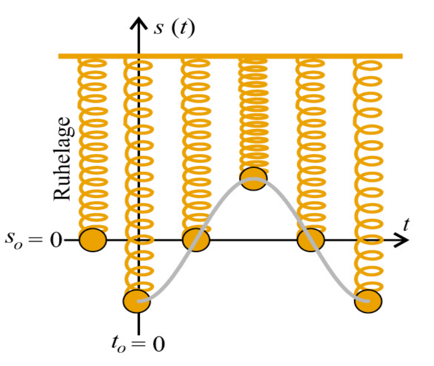
Wir haben es in diesem Fall also mit einer „echten“ Differentialgleichung erster Ordnung zu tun.

Beispiel 12.3.3

Eine Masse m hängt am unteren Ende einer Spiralfeder. Lenkt man die Feder mitsamt Gewicht aus der Ruhelage aus und überlässt die Feder dann vom Startzeitpunkt $t_0 = 0$ an sich selbst, vollführt diese eine Schwingung entlang einer vertikalen Strecke.

Die Abweichung s vom Ruhepunkt ist dann wieder eine Funktion der Zeit t, d.h. $s = s(t)$.

Beispiel 12.3.3 (Fortsetzung)



Harmonische Schwingung

Beispiel 12.3.3 (Fortsetzung)

Sehen wir von Beinflussungen wie Dämpfung etc. ab, so wirkt auf die Masse m zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ die Rückstellkraft $F(t)$ der Feder, die proportional der Auslenkung $s(t)$ und dieser entgegengesetzt ist, d.h.

$$F(t) = -k \cdot s(t)$$

mit einer charakteristischen Federkonstanten $k > 0$.

Beispiel 12.3.3 (Fortsetzung)

Die Kraft $F(t)$ bewirkt eine Beschleunigung gemäß des Newton'schen Zusammenhang

$$\begin{aligned} \text{Kraft} &= \text{Masse mal Beschleunigung}, \\ F(t) &= ms''(t), \end{aligned}$$

woraus sich durch Gleichsetzen die DG

$$\boxed{s''(t) = -\frac{k}{m}s(t)}$$

ergibt. Es handelt sich um eine DG zweiter Ordnung, welche den Bewegungsvorgang der Masse beschreibt.

Beispiel 12.3.3 (Fortsetzung)

Die Gesamtheit aller Lösungen von

$$s''(t) = -\frac{k}{m} s(t)$$

gegeben ist durch die Funktionenschar

$$s(t) = C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \sin(\omega t) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

mit $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Diese Beispiele machen eines deutlich:

Eine bloße DG ohne Angabe weiterer Zusatzinformationen bzw. -forderungen besitzt in der Regel keine eindeutige Lösung.

Vielmehr besteht die Lösungsgesamtheit aus unendlich vielen Funktionen.

§12.4 Richtungsfelder

Funktionen einer Variablen haben wir zum Zweck der Anschauung durch ihren Graphen in einem zweidimensionalen Koordinatensystem dargestellt.

In diesem Abschnitt wollen wir eine Möglichkeit vorstellen, die unendlich vielen Lösungen einer gewöhnlichen expliziten DG

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

erster Ordnung graphisch zu veranschaulichen.

Wir überziehen das übliche $x - y$-Koordinatensystem mit einem Punkteraster und betrachten einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) des rasters, für welchen der Ausdruck $f(x_0, y_0)$ definiert sei.

Nehmen wir an, es gibt eine Lösungskurve $y(x)$ der DG $y'(x) = f(x, y(x))$, die durch den Punkt (x_0, y_0) verläuft (d.h. es gelte $y(x_0) = y_0$), so liefert uns die DG $y'(x) = f(x, y(x))$ auch die Steigung, welche die Lösungskurve in diesem Punkt besitzt, nämlich

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

Haften wir also dem Punkt (x_0, y_0) ein kleines Geradenstück mit der berechneten Steigung $f(x_0, y_0)$ an, so gibt dies näherungsweise den Verlauf der Lösungskurve in einer Umgebung von (x_0, y_0) wieder.

Der Punkt (x_0, y_0) mit angehaftetem Geradenstück wird als Linienelement bezeichnet.

Berechnen und skizzieren wir das Linienelement für mehrere Punkte des Rasters, so ergibt sich ein Feld von kleinen Tangentenstückchen bzw. Linienelementen, das so genannte Richtungsfeld der DG.

Bei hinreichend feinem Raster lässt sich hieraus bereits gut der qualitative Verlauf der (i.A.) unendlich viele Lösungskurven der DG

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

erkennen.

Beispiel 12.4.1

Gegeben sei die DG

$$y'(x) = -\frac{x}{y}.$$

Die rechte Seite $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ der DG ist dabei für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$ definiert.

Wir berechnen die Linienelemente in den drei Punkten

$$(1, 1), \qquad (-1, 1) \qquad \text{und} \qquad (1, -2).$$

Beispiel 12.4.1 (Fortsetzung)

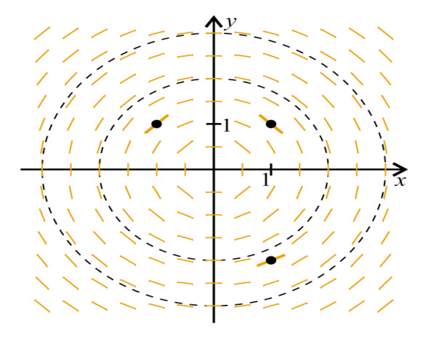
Aus der DG erhalten wir im Einzelnen

- Steigung im Punkt $(1, 1)$: $\dfrac{dy}{dx} = f(1, 1) = -\dfrac{1}{1} = -1,$
- Steigung im Punkt $(-1, 1)$: $\dfrac{dy}{dx} = f(-1, 1) = -\dfrac{-1}{1} = 1,$
- Steigung im Punkt $(1, -2)$: $\dfrac{dy}{dx} = f(1, -2) = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}.$

Beispiel 12.4.1 (Fortsetzung)

Für eine erheblich größere Anzahl von Punkten, nämlich die Punkte eines Gitters mit Maschenweite $\frac{1}{2}$, sind in Abbildung die zugehörigen Linienelemente dargestellt.

Beispiel 12.4.1 (Fortsetzung)



Richtungsfeld von $y'=-x/y$

Beispiel 12.4.1 (Fortsetzung)

Die Gestalt dieses Richtungsfelds lässt zudem die Lösungskurvenschar der DG erahnen.

Es handelt sich um die Schar

$$y(x) = \pm\sqrt{c^2 - x^2} \qquad (|x| < c, \quad c > 0)$$

aller konzentrischen Halbkreise um den Ursprung mit Radius c.

§12.5 Algemeine und partikuläre Lösungen

Wie wir in den letzten Abschnitten gesehen haben, besitzt eine gegebene explizite DG in aller Regel unendlich viele Lösungen, die sich zu einer Lösungsschar zusammenfassen lassen.

Definition 97.

Bei der Gesamtheit aller Lösungsfunktionen einer DG mit gegebenem Definitionsbereich spricht man von der allgemeinen Lösung.

Bemerkung.

Man beachte, dass ein und dieselbe Funktionenschar (unabhängig davon, ob es sich um die allgemeine Lösung einer DG handelt) auf mannigfache Weise durch Konstanten parametrisiert werden kann.

Beispielweise repräsentieren die Ausdrücke

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c_1 \qquad (c_1 \in \mathbb{R}) \qquad \text{und}$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x) + c_2 \qquad (c_2 \in \mathbb{R})$$

die blaugleiche Kurvenschar, d.h. die Gesamtheit aller Lösungen ist diesselbe, wenn c_1 bzw. c_2 jeweils ganz $\mathbb{R}$ durchläuft.

Bemerkung (Fortsetzung)

Man beachte auch, dass eine feste Lösung in beiden Darstellungen durch unterschiedliche Konstanten c_1 und c_2 realisiert wird!

Bemerkung (Fortsetzung)

Unter Umständen lassen sich auch mehrere Konstanten einer Funktionenschar zu einer geringeren Anzahl von Konstanten zusammenfassen.

Besitzt beispielsweise eine Schar die Gestalt

$$y(x) = g(x) + c_1 + c_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}),$$

so schreiben wir besser

$$y(x) = g(x) + c \qquad (c \in \mathbb{R}),$$

denn mit c_1 und c_2 durchläuft auch $c_1 + c_2$ ganz $\mathbb{R}$.

Bemerkung (Fortsetzung)

Im Fall der Lösungsschar

$$y(t) = c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

der Schwingungsdifferentialgleichung ist es nicht möglich, die Zahl der Konstanten auf weniger als zwei zu beschränken.

Der Grund hierfür liegt darin, dass wir es in diesem Beispiel mit einer DG zweiter Ordnung zu tun haben.

Bemerkung (Fortsetzung)

Dies liegt insbesondere den Verdacht nahe, dass hinter der allgemeinen Lösung einer expliziten DG der Ordnung n eine Funktionenschar mit genau n Parametern steckt.

Auch wenn unsere bisherigen Beispiele dies suggerieren und dieser Sachverhalt auch für viele DG der Fall ist, ist dies entgegen manch landläufiger Meinung im Allgemeinen nicht richtig.

„Oft“ liegt zumindest der Fall vor, dass sich die allgemeine Lösung zusammensetzt aus einer n-parametrigen Lösungsschar und ggf. „wenigen“ weiteren Funktionen, die bisweilen auch als „singuläre Funktionen“ bezeichnet werden.

Um eine eindeutige Lösung einer DG zu erhalten, bedarf es im Allgemeinen weiterer Rahmenbedingungen bzw. Zusatzinformationen.

Für eine gewöhnliche DG erster Ordnung in expliziter Form ist dies die Vorgabe eines so genannten Anfangswertes bzw. einer Anfangsbedingung.

Unter allen Lösungen der DG

$$y' = f(x, y)$$

sei speziell diejenige Lösung $y(x)$ gesucht, die zusätzlich durch den Punkt (x_0, y_0) gehe, d.h. zusätzlich zu DG gelte

$$y(x_0) = y_0.$$

Zu beachten ist hierbei, dass das Anfangswertepaar (x_0, y_0) im Definitionsbereich der DG zu liegen hat; die rechte Seite $f(x_0, y_0)$ sei also definiert.

Definition 98.

Die Suche nach einer Lösung der DG

$$y' = f(x, y),$$

welche zusätzlich Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

erfüllt, wird als Anfangswertproblem bezeichnet.

Eine Lösung, die das Anfangswertproblem löst, wird als partikuläre Lösung bezeichnet.

Die Gesamtheit aller partikulären Lösungen aller zulässigen AWP stellt dann umgekehrt wieder die allgemeine Lösung dar.

Nicht jedes AWP besitzt auch eine Lösung. Falls dies doch der Fall ist, so muss diese Lösung nicht zwingend eindeutig bestimmt sein.

Definition 99.

Im Fall von expliziten DG von allgemein n-ter Ordnung besteht das AWP darin, eine Lösung $y(x)$ der DG

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

zu bestimmen, welche die n Bedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

mit vorgegeben Werten $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Die Lösung eines AWP der Ordnung n kann in der Praxis folgendermaßen geschehen:

- Man bestimmte zunächst (falls möglich) die allgemeine Lösung der DG, welche eine Anzahl von Parametern enthält.
- Durch Einsetzen der Anfangsbedingung(en) erhalten wir für $n = 1$ eine Gleichung bzw. für $n \geqslant 2$ ein (nicht notwendigerweise lineares) System von Gleichungen, woraus die konkreten Parameter der gesuchten partikulären Lösung bestimmt werden können.

Für explizite DG

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

der Ordnung n mit $n \geqslant 2$ gibt es weitere Möglichkeiten, durch die Vorgabe von Rahmenbedingungen die Lösungsvielfalt einzugrenzen.

Da wir dies nicht tiefer gehend thematisieren werden, wollen wir es bei einer kurzen Abhandlung für den Spezialfall $n = 2$ belassen:

Statt der Vorgabe von $y(x_0)$ und $y'(x_0)$ (AWP) suchen wir eine Lösung, deren Graph durch die Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) geht (wobei (x_0, y_0) und (x_1, y_1) im Definitionsbereich von f liegen müssen).

Gesucht ist also eine Lösung des Problems

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \qquad \text{und} \qquad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von einem Randwertproblem.

Auch eine eventuelle Lösung eines RWP wird als partikuläre Lösung bezeichnet.