Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 16

24. Juni 2010

Kapitel 12. Grundlagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

§12.6 Gewinnung von Differentialgleichungen aus Kurvenscharen

In den vorigen Abschnitten haben wir dargelegt, wie die allgemeine Lösung einer DG durch eine Funktionenschar repräsentiert wird.

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Umkehrung zuwenden:

Wir zeigen, wie aus einer gegebenen Funktionenschar umgekehrt eine (im Allgemeinen implizite) DG konstruiert werden kann, deren allgemeine Lösung gerade die gegebene Kurvenschar darstellt oder zumindest beinhaltet.

Wir betrachten zunächst den Fall einer Funktionenschar mit nur einer Scharkonstanten c und versuchen, diese Kurvenschar als Teil der allgemeinen Lösung einer DG erster Ordnung zu schreiben.

1. Betrachten wir die Funktion

$$y(x) = g_c(x) \tag{12.6.1}$$

für einen beliebigen Parameterwert c.

2. Wir differenzieren diese Gleichung und erhalten eine zweite Gleichung

$$y'(x) = g_c'(x). \tag{12.6.2}$$

3. Aus diesen beiden Gleichungen (12.6.1) und (12.6.2) können wir durch geschicktes Kombinieren, Auflösen etc. (unter Umständen) den Parameter c eliminieren.

Wir erhalten dann eine Gleichung, in welcher der Parameter c verschwundwn ist und welche stattdessen einen Ausdruck in $y'(x)$ enthält.

Damit haben wir eine (i.A. implizite) DG erster Ordnung gewonnen, deren allgemeine Lösung die gegebene Kurvenschar beinhaltet.

Auch für eine Kurvenschar, die von zwei Parametern abhängt, können wir unter Umständen eine DG zweiter Ordnung finden, deren allgemeine Lösung die gegebene Kurvenschar beinhaltet.

In diesen Fall werden die beiden Parameter in der Regel dadurch eliminiert, dass wir die Kurvenschar zwei mal differenzieren.

Generell ist es geboten, eine n-parametrige Kurvenschar als Teil der allgemeinen Lösung einer DG der Ordnung n darzustellen.

In manchem Fällen ist man versucht, die Kurvenschar öfter abzuleiten, um so eine einfachere Darstellung durch eine DG zu erreichen.

Kapitel 13. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

§13.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Frage:

Wann besitzt ein AWP

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

für ein vorgegebenes Anfangswertepaar $(x_0, y_0) \in D_f$ eine Lösung?

Satz 69. (Existenzsatz von Peano)

Ist die rechte Seite, also die Funktion $f(x, y)$, stetig auf ihrem Definitionsbereich D_f, so besitzt das AWP für ein vorgegebenes Anfangswertepaar $(x_0, y_0) \in D_f$ (mindestens) eine Lösung.

Bemerkung.

Jedoch reicht die Stetigkeit von f allein nicht aus, um auch die Eindeutigkeit der Lösung zu sichern.

Beispiel 13.1.1

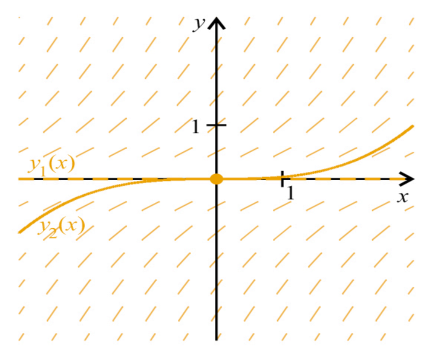
Gegeben sei das AWP

$$y' = \sqrt[3]{y^2}, \qquad y(0) = 0$$

mit einer auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetigen rechten Seite $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$.

- Zu einem ist
$$y_1(x) \equiv 0$$
eine Lösung, was man durch Einsetzen bestätigt.
- Zusätzlich dazu ist aber auch die Funktion
$$y_2(x) := \frac{x^3}{27}$$
eine Lösung des obigen AWP auf ganz $\mathbb{R}$.

Beispiel 13.1.1 (Fortsetzung)



AWP mit mehreren Lösungen

Der nachfolgende Satz gibt ein hinreichendes und praxisgerechtes Kriterium dafür an, wann ein AWP sogar eine eindeutige Lösung besitzt.

Ist die rechte Seite $f(x, y)$ demnach „nicht allzu unangenehm“, so ist eine eindeutige Lösung gesichert.

Satz 70. (Existenz- und Eindeutigkeitkeitssatz von Picard-Lindelöf)

Das AWP

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

besitzt für jeden inneren Punkt (x_0, y_0) aus dem Definitionsbereich D_f eine eindeutige Lösung, wenn die Funktion $f(x, y)$ auf D_f stetig ist und wenn sie in ihrem Inneren bezüglich y partiel differenzierbar ist mit stetiger Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Unter dem Inneren des Definitionsbereichs wollen wir dabei alle Punkte aus D_f verstehen, die keine Randpunkte sind.

Bemerkung

Oft ist in der Literatur statt der partiellen Differenzierbarkeit mit stetiger Ableitung auch nur verlangt, dass die Funktion $f(x, y)$ eine so genannte lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich y erfüllt.

Darunter versteht man die Eigenschaft, dass es um das Anafangswertepaar (x_0, y_0) aus dem Inneren von D_f eine zumindest kleine Umgebung U geben muss, auf welcher gelte

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|$$

für alle Punkte $(x, y_1), (x, y_2)$ aus U mit einer so genannten Lipschitz-Konstanten $L > 0$.

Bemerkungen.

- Die genannte Differenzierbarkeitsforderung an die Funktion $f(x, y)$ (bzw. die Existenz einer Lipschitz-Bedingung) lediglich hinreichend, aber nicht notwendig ist für das Vorliegen einer eindeutig bestimmten Lösung.
- Es ist also nicht ausgeschlossen, dass es Funktionen $f(x, y)$ gibt, welche diese Kriterien nicht erfüllen, für welche aber das AWP dennoch eine eindeutige Lösung besitzt.
- Liegt jedoch keine eindeutige Lösbarkeit eines AWP vor, so ist mit Sicherheit die Bedingung der partiellen Differenzierbarkeit inklusive stetiger Ableitung verletzt.

§13.2 Elementare Lösungsverfahren

Wir untersuchen indiesem Abschnitt Verfahren zur Lösung von DG unterschiedlichen Typs.

1. Form $y' = f(x)$

Es sei f eine auf einem Intervall stetige Funktion.
Charakteristisch für diese DG ist, dass die rechte Seite $f(x, y)$ die Variable y nicht enthält.

Die Lösung des Problems

$$y' = f(x)$$

ist gegeben durch

$$\boxed{y(x) = \int f(x)dx \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = F(x) + c \qquad (c \in \mathbb{R})},$$

wenn $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$ bezeichnet.

2. Form $y' = f(y)$ (Autonome DG)

Die rechte Seite $f(x, y)$ sei hier von x unabhängig und lediglich eine Funktion von y; man spricht auch von einer autonomen DG.

Es sei dabei $f(y)$ eine auf einem Intervall stetige Funktion.

Form $y' = f(y)$ (Fortsetzung)

Um die allgemeine Lösung zu bestimmen, ermitteln wir in einem ersten Schritt ausschließlich

- **Lösungen durch Punkte** $(x, y) \in D_f$ **mit** $f(y) \neq 0$**.**

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad \Leftrightarrow \quad x'(y) = \frac{1}{f(y)}$$

Unter Vertauschung den Rollen von x und y als abhängige und unabhängige Variablen erhalten wir

$$\boxed{x(y) = \int \frac{1}{f(y)} dy \qquad \Leftrightarrow \qquad x(y) = G(y) + c \qquad (c \in \mathbb{R})},$$

wenn $G(y)$ eine beliebige Stammfunktion von $1/f(y)$ ist.

Form $y' = f(y)$ (Fortsetzung)

- **Lösungen durch Punkte** $(x, y) \in D_f$ **mit** $f(y) = 0$**.**
  Ist y_0 eine Nullstelle von f, so erfüllt die Funktion

  $$\boxed{y(x) \equiv y_0}$$

  ebenfalls die DG, was man durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigt.

  Die Funktion $y(x) \equiv y_0$ ist dann zusätzlich in die Lösungsschar aufzunehmen.

3. Form $y' = h(x) \cdot g(y)$ (Getrennte Veränderliche)

Eine solche DG, bei der die rechte Seite aus dem Produkt zweier Funktionen $h(x)$ und $g(y)$ (Getrennte Veränderliche), wird mit dem Verfahren der Trennung der Variablen gelöst.

Die Funktionen $h(x)$ und $g(y)$ seien auf zwei Intervallen definierte stetige Funktionen.

Es sei bemerkt, dass auch der Fall eines Quotienten

$$y' = \frac{h(x)}{z(y)} = h(x) \cdot \underbrace{\frac{1}{z(y)}}_{=:g(y)}$$

unter den Typ getrennter Veränderlicher fällt.

3. Form $y' = h(x) \cdot g(y)$ (Fortsetzung)

- **Lösungen durch Punkte** $(x, y) \in D_f$ **mit** $g(y) \neq 0$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y) \qquad \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy = h(x) dx.$$

Wir integrieren die Gleichung auf beiden Seiten - links bezüglich y, rechts bezüglich x - und erhalten

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx \text{ bzw. } K(y) = H(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})}$$

mit beliebigen Stammfunktionen $K(y)$ von $1/g(y)$ und $H(x)$ von $h(x)$. Nach Integration sollten wir, sofern dies möglich ist, die letze Gleichung nach y auflösen.

3. Form $y' = h(x) \cdot g(y)$ (Fortsetzung)

Man beachte in diesem Zusammenhang, dass eine formal mögliche Trennung der Differentiale in der Form $\frac{1}{dx}$ bzw. $\frac{1}{dy}$ für das Verfahren der Trennung der Variablen nicht brauchbar ist.

3. Form $y' = h(x) \cdot g(y)$ (Fortsetzung)

- **Lösungen durch Punkte** $(x, y) \in D_f$ **mit** $g(y) = 0$.
  Für jede Nullstelle y_0 von $g(y)$ ist nämlich

  $$\boxed{y(x) \equiv y_0}$$

  eine Lösung der DG, was man wieder durch Einsetzen verifiziert.

  Diese Lösungsfunktionen sind der obigen Lösungsschar hinzuzufügen.