Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 18

1. Juli 2010

Kapitel 13. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

§13.2 Elementare Lösungsverfahren (Fortsetzung)

7. Form $y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ (Integrierender Faktor)

In vielen Fallen ist in der Gleichung

$$y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$$

die Schwarz'sche Bedinung $g_y = h(x)$ nicht erfüllt, d.h.

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy$$

ist kein totales Diffferential - eine Stammfunktion $V(x,y)$ existiert somit nicht.

7. Form $y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ (Integrierender Faktor-Fortsetzung)

Im konkreten Einzelfall gibt es jedoch unter Umsänden eine Möglichkeit, die gegebene DG in äquivalenter Weise so modifizieren, dass eine exakte DG entsteht.

Dies geschieht durch Multiplikation der DG

$$y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$$

mit einer geeigneten Funktion $w(x,y)$, die integrierender Faktor genannt wird.

7. Form $y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ (Integrierender Faktor-Fortsetzung)

Unser Ziel soll es im Folgenden sein, einen integrierenden Faktor $w(x,y)$ zu finden mit

$$w(x,y) \neq 0 \qquad \text{auf dem gesamten Rechtecksgebiet} \quad R$$

und der Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[w(x,y) \cdot g(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x,y) \cdot h(x,y)\right].$$

7. Form $y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ (Integrierender Faktor-Fortsetzung)

Wegen der Annahme $w(x, y) \neq 0$ für $(x, y) \in R$ ist jede Lösung der modifizierten DG

$$y' = -\frac{w(x, y) \cdot g(x, y)}{w(x, y) \cdot h(x, y)}$$

auch eine Lösung der ursprünglichen DG

$$y' = -\frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

und umgekehrt.

7. Form $y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ (Integrierender Faktor-Fortsetzung)

Bei der Suche nach einem integrierenden Faktor erwiest es sich als naheliegend, aber unpraktikabel, eine solche Funktion $w(x, y)$ durch die Forderung

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[w(x, y) \cdot g(x, y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x, y) \cdot h(x, y)\right]$$

direkt zu bestimmen.

Die sich daraus ergebenden Bestimmungsgleichungen für $w(x, y)$ würden das Lösen partieller DG implizieren, was die Situation noch zusätzlich verkomplizieren würde.

7. Form $y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ (Integrierender Faktor-Fortsetzung)

Sinnvoller ist es, sich auf integrierende Faktoren der speziellen Gestalt

$$\boxed{\begin{aligned} w(x,y) &= w(x) \\ w(x,y) &= w(y) \\ w(x,y) &= w(xy) \\ w(x,y) &= w(x^2+y^2) \end{aligned}}$$

zu beschränken.

7. Form $y' = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ (Integrierender Faktor-Fortsetzung)

Welcher Ansatz im konkreten Fall der geeignetste ist, kann im Allgemeinen nicht vorausgesagt werden.

Uns bleibt somit nichts anderes übrig, als aufs Geratewohl das Funktionieren des ein oder anderen Ansatzes zu testen.

Oft erweisen sich dabei die ersten beiden Möglichkeiten als vielversprechend.

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (Lineare Differentialgleichung)

In einer DG der Form

$$y' = g(x) \cdot y + r(x)$$

treten y und y' in erster Potenz auf.

Die Koeffizientenfunktion $g(x)$ sowie die Funktion $r(x)$ seien stetig und auf einem gemeinsamen Intervall I definiert.

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (Fortsetzung)

Bei der Form

$$y' = g(x) \cdot y + r(x)$$

handelt sich um die so genannte Normalform einer linearen DG.

Haben wir es mit der allgemeinen (impliziten) Form

$$a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = b(x)$$

zu tun mit $a_1 \neq 0$, so können wir formal mittels Division durch $a_1(x)$ und Auflösen nach y' die explizite Normalform herstellen.

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (Fortsetzung)

Wir unterscheiden

- Eine homogene lineare DG liegt vor, wenn $r(x) \equiv 0$. Die DG lautet also in diesem speziellen Fall
$$y' = g(x) \cdot y.$$
- Eine inhomogene lineare DG liegt vor, falls $r(x) \neq 0$. Wir haben es dann mit dem allgemeinen Fall
$$y' = g(x) \cdot y + r(x)$$
zu tun.

Bei der Funktion $r(x)$ spricht man auch von der rechten Seite, der Inhomogenität oder der Störung einer linearen DG.

8. Form $y' = g(x) \cdot y$ (die homogene lineare DG)

Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen DG

$$y' = g(x) \cdot y$$

ermitteln wir durch Trennung der Variablen.

Aus

$$y' = g(x) \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = g(x)dx$$

erhalten wir

$$\int \frac{dy}{y} = \int g(x)dx \Leftrightarrow \ln|y| = \int g(x)dx = G(x) + C_1 \ (C_1 \in \mathbb{R})$$

mit einer beliebigen Stammfunktion $G(x)$ von $g(x)$.

8. Form $y' = g(x) \cdot y$ (die homogene lineare DG - Fortsetzung)

Durch beidseitige Anwendung der e-Funktion erhalten wir dann

$$|y| = e^{G(x)} \cdot C_2 \qquad (C_2 = e^{C_1} > 0)$$

und durch Auflösen des Absolutbetrags

$$y(x) = \pm C_2 \cdot e^{G(x)} = C_3 \cdot e^{G(x)} \qquad (C_3 = \pm C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Durch Einsetzen erkennen wir zudem, dass auch die Nullfunktion $y \equiv 0$ jede homogene DG löst.

Wir erhalten dann als allgemeine Lösung der homogenen DG

$$\boxed{y(x) = C \cdot e^{G(x)} \quad (C \in \mathbb{R}).}$$

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (die inhomogene lineare DG)

Das Verfahren zur Lösung einer inhomogenen linearen DG

$$y' = g(x) \cdot y + r(x)$$

in Normalform gliedert sich in mehrere Schritte:

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (die inhomogene lineare DG - Fortsetzung)

1. Betrachten wir die homogene DG

$$y' = g(x) \cdot y$$

und berechnen deren allgemeine Lösung gemäß den obigen Ausführungen zu

$$y_{hom} = C \cdot e^{G(x)}.$$

(Wieder bezeichne $G(x)$ eine beliebige Stammfunktion von g).

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (die inhomogene lineare DG - Fortsetzung)

1. Zu Abkürzungszwecken bezeichnen wir für $C = 1$ mit

$$y_g := 1 \cdot e^{G(x)}$$

die sogenannte Grundfunktion der homogenen DG. Sie ist positiv und von der Wahl der Stammfunktion $G(x)$ abhängig.

Damit lässt sich die allgemeine Lösung der homogenen DG darstellen zu

$$\boxed{y_{hom} = C \cdot y_g(x) \qquad (C \in \mathbb{R}).}$$

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (die inhomogene lineare DG - Fortsetzung)

2. Im zweiten Schritt machen wir einen Ansatz zur Lösung der inhomogenen DG. Das hierfür verwendere Verfahren trägt den Namen „Variation der Konstanten “.

Wir setzen die Funktion

$$y(x) = C(x) \cdot y_g(x)$$

und versuchen, solche Funktionen $C(x)$ zu bestimmen, für welche dieser Ausdruck $y(x)$ die gegebene inhomogene DG löst.

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (die inhomogene lineare DG - Fortsetzung)

3. Mit Hilfe der Produktregel berechnen wir die Ableitung dieses Lösungskandidaten $y(x)$

$$y'(x) = C(x)y_g'(x) + C'(x)y_g(x).$$

Sowohl $y(x)$ als auch $y'(x)$ setzen wir daher in $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ ein. Wir erhalten dann als Bedingung an $C(x)$

$$C'(x)y_g(x) + C(x) \cdot \left[y_g'(x) - g(x) \cdot y_g(x)\right] = r(x).$$

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (die inhomogene lineare DG - Fortsetzung)

3. Da die Grundlösung $y_g(x)$ die homogene DG löst verschwindet der Klammerausdruck und die Bedingung an $C(x)$ reduziert sich auf

$$C'(x)y_g(x) = r(x)$$

bzw. nach Division durch die stets positive Funktion $y_g(x)$:

$$C'(x) = \frac{r(x)}{y_g(x)}$$

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (die inhomogene lineare DG - Fortsetzung)

3. Durch Integration dieser Gleichung lasst sich eine ganze Schar von Funktionen $C(x)$ bestimmen. Es ist

$$C(x) = \int \frac{r(x)}{y_g(x)} dx = H(x) + C_1 \qquad (C_1 \in \mathbb{R})$$

mit einer beliebigen Stammfunktion $H(x)$ von $\frac{r(x)}{y_g(x)}$.

8. Form $y' = g(x) \cdot y + r(x)$ (die inhomogene lineare DG - Fortsetzung)

$\boxed{4.}$ Im letzen Schritt setzen wir die ermittelte Funktionenschar $C(x)$ in den ursprünglichen Ansatz $y(x) = C(x) \cdot y_g(x)$ ein und erhalten als allgemeine Lösung der inhomogenen DG

$$\boxed{y(x) = (H(x) + C_1) \cdot y_g(x) \qquad (C_1 \in \mathbb{R})}$$

mit einer beliebigen Stammfunktion $H(x)$ von $\dfrac{r(x)}{y_g(x)}$.