Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 19

8. Juli 2010

Kapitel 14. Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung

§14.1 Systeme gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Der Einfachheit halber behandeln wir in diesem Abschnitt vornehmlich zweikomponentige lineare Systeme.

Jedoch gelten sämtliche Überlegungen analog auch für Systeme von höherer Komponentenzahl.

In einem linearen System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung sind mehrere (hier zwei) Funktionen

$$y_1(x) \qquad \text{und} \qquad y_2(x)$$

über ihre jeweils ersten Ableitungen $y_1'(x)$ und $y_2'(x)$ in der folgenden Weise miteinander verknüpft:

$$\begin{array}{rcccccc} y_1' & = & a_1(x)\cdot y_1 & + & b_1(x)\cdot y_2 & + & r_1(x) \\ y_2' & = & a_2(x)\cdot y_1 & + & b_2(x)\cdot y_2 & + & r_2(x). \end{array}$$

Die Funktionen $a_1(x), a_2(x), b_1(x), b_2(x)$ seien dabei auf einem gemeinsamen Intervall I definiert und dort stetig.

Alternativ können wir auch eine vektorielle Schreibweise verwenden, die besonders bei mehr als zwei Komponentenfunktionen die übersichtlichere ist.

Wir definieren

$$\vec{y}(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad \vec{r}(x) := \begin{pmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \end{pmatrix}$$

sowie die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ a_2(x) & b_2(x) \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich das lineare Gleichungssystem auch kompakt formulieren zu

$$\boxed{\vec{y}' = A(x) \cdot \vec{y} + \vec{r}(x).}$$

Wieder sprechen wir von einem homogenen System, falls

$$\vec{r}(x) \equiv 0,$$

anderfalls von einem inhomogenen System.

Zunächst wollen wir uns auf homogene Systeme

$$\vec{y}' = A(x) \cdot \vec{y}$$

beschränken.

Alle differenzierbaren Funktionen $\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ mit

$$\vec{f}'(x) = A(x) \cdot f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ a_2(x) & b_2(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$$

sind Lösungen dieses Systems.

Ähnlich wie eine einzelne skalare DG besitzt auch ein lineares System von DG erster Ordnung unendlich viele Lösungen.

In diesem Zusammenhang wird die Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit von Lösungen eine zentrale Rolle spielen.

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auch hier zunächst auf den Fall zweier Gleichungen.

Definition 100. (Lineare Unabhängigkeit)

Die beiden vektorwertigen Funktionen

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

heißen linear unabhängig auf dem Intervall I, wenn die Gleichung

$$c_1 \cdot \vec{f}(x) + c_2 \cdot \vec{g}(x) = \vec{0}$$

für alle $x \in I$ nur trivial, also durch die alleinige Wahl

$$c_1 = c_2 = 0$$

erfüllt werden kann. Lässt sich diese Gleichung für alle $x \in I$ durch mindestens eine Konstante c_1 oder c_2 ungleich null erfüllen, so heißen die Lösungen hingegen linear abhängig.

Bemerkung.

Diese Definition gilt sinngemäß auch allgemein für m Funktionen

$$\vec{f}_1(x) = \begin{pmatrix} f_1^{(1)}(x) \\ \vdots \\ f_1^{(m)}(x) \end{pmatrix}, \ldots, \vec{f}_m(x) = \begin{pmatrix} f_m^{(1)}(x) \\ \vdots \\ f_m^{(m)}(x) \end{pmatrix}$$

mit jeweils m Komponentenfunktionen.

Aus der Definition 100 erkennen wir, dass zwei Funktionen

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, wenn wir eine beliebige Stelle $x_0 \in I$ finden, so dass es sich bei den entsprechenden Vektoren

$$\vec{f}(x_0) = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{g}(x_0) = \begin{pmatrix} g_1(x_0) \\ g_2(x_0) \end{pmatrix}$$

um keine gegenseitigen Vielfache handelt.

Mit anderen Worten: Ist die so genannte Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) \\ f_2(x) & g_2(x) \end{vmatrix}$$

für mindestens ein $x_0 \in I$ ungleich null, so sind die Lösungen linear unabhängig.

Sind darüber hinaus die Funktionen

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

Lösungen eines homogenen linearen Systems

$$\vec{y}' = A(x) \cdot \vec{y}$$

so lässt sich sogar Folgendes zeigen:

- Ist $W(x_0) \neq 0$ an einer beliebigen Stelle x_0, so sind die Funktionen $\vec{f}(x)$ und $\vec{g}(x)$ linear unabhängig. Man kann nachweisen, dass dann sogar $W(x) \neq 0$ an allen Stellen $x \in I$ gilt.
- Ist $W(x) = 0$ an einer beliebigen Stelle x_0, so gilt sogar $W(x) = 0$ für alle $x \in I$ und die Lösungen sind linear abhängig.

Jeweils zwei linear unabhängige Lösungen des homogenen linearen Systems

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = A(x) \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad A(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & b_1(x) \\ a_2(x) & b_2(x) \end{pmatrix}$$

werden auch als ein Fundamentalsystem bezeichnet.

Ein solches ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Sämtliche in den vergangenen Zeilen getroffenen Aussagen bezüglich der Wronski-Determinante lassen sich auf Systeme

$$\vec{y}' = A(x) \cdot \vec{y}$$

mit höherer Komponentenzahl m (d.h. $A(x)$ ist eine $m \times m$-Matrix mit $m \geqslant 2$) verallgemeinern.

Haben wir es in diesem Fall mit Lösungen

$$\vec{f}_1(x) = \begin{pmatrix} f_1^{(1)}(x) \\ \vdots \\ f_1^{(m)}(x) \end{pmatrix}, \ldots, \vec{f}_m(x) = \begin{pmatrix} f_m^{(1)}(x) \\ \vdots \\ f_m^{(m)}(x) \end{pmatrix}$$

zu tun, so haben wir für die Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1^{(1)}(x) & \ldots & f_m^{(1)}(x) \\ f_1^{(2)}(x) & \ldots & f_m^{(2)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m)}(x) & \ldots & f_m^{(m)}(x) \end{vmatrix}$$

nur für ein beliebiges $x_0 \in I$ zu überprüfen, ob $W(x_0) \neq 0$ oder $W(x_0) = 0$ gilt.

Im ersten Fall ist damit bereits die lineare Unabhängigkeit, im zweiten Fall die lineare Abhängigkeit der Lösungen gezeigt.

Es soll unser Ziel sein, zu einem gegebenen homogenen linearen System von m DG erster Ordnung genau m linear unabhängige Lösungen zu ermitteln.

Man kann zeigen, dass für ein solches System immer m linear unabhängige Lösungen existieren, die dann als Fundamentalsystem bezeichnet werden.

Mehr als m linear unabhängige Lösungen zu finden ist hingegen nicht möglich.

Darüber hinaus lassen sich ausgehend von diesen m linear unabhängigen Lösungen alle Lósungen des homogenes linearen Systems durch Linearkombination aufbauen.

Satz 71. (Lösungen eines homogenen linearen Systems)

Die $m \times m$-Matrix $A(x)$ beinhalte stetige, auf einem gemeinsamen Intervall I definierte Einträge. Zu einem homogenen linearen System

$$\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y}$$

von m DG in den Funktionen $y_1, \ldots, y_m$ lassen sich stets m linear unabhängige Lösungen

$$\vec{f}_1(x), \ldots, \vec{f}_m(x)$$

bestimmen. Es ist andererseits m auch die maximale Anzahl linear unabhängiger Lösungen des Systems.

Satz 71. (Fortsetzung)

Ausgehend von den Funktionen $\vec{f}_1(x), \ldots, \vec{f}_m(x)$ lässt sich die allgemeine Lösung $\vec{y}(x)$ des Systems durch Linearkombinationen aus diesen Lösungen bilden, d.h. es ist

$$\vec{y}(x) = c_1 \cdot \vec{f}_1(x) + \cdots + c_m \cdot \vec{f}_m(x)$$

mit $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$.

Anzumerken ist, dass die Lösungen $\vec{f}_1(x), \ldots, \vec{f}_m(x)$ nicht eindeutig bestimmt sind.

Auch aus davon verschiedenen Lösungen $\vec{g}_1(x), \ldots, \vec{g}_m(x)$ lässt sich die allgemeine Lösung in der Form

$$\vec{y}(x) = c_1 \cdot \vec{g}_1(x) + \cdots + c_m \cdot \vec{g}_m(x)$$

aufbauen, sofern die Lösungen $\vec{g}_1(x), \ldots, \vec{g}_m(x)$ linear unabhängig sind.

Haben wir es wie bisher mit einem homogenen System

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y}$$

von linearen DG zu tun, bei dem die Systemmatrix A von x abhängt, so liegt ein verhältnismäßig schwieriger Fall vor.

Für solche Differentialgleichungssysteme existieren nur in speziellen Fällen systematische Lösungsverfahren.

Anders sieht die Situation aus, falls es sich bei $A(x)$ um eine konstante Matrix handelt, also $A(x) \equiv A$.

Im Fall $m \equiv 2$ besitzt ein solches System die Gestalt

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & a_1 \cdot y_1 + b_1 \cdot y_2 \\ y_2' & = & a_2 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \vec{y}. \qquad (*)$$

Bei den Koeffizienten a_1, a_2, b_1, b_2 handelt es sich also in diesem Fall um von x unabhängige, feste reelle Zahlen.

Ist $b_1 = 0$ in der Darstellung (*), so haben wir es mit einem leicht zu handhabenden System zu tun.

1. Wir lösen dann die erste Zeile

$$y_1' = a_1 \cdot y_1$$

und erhalten als allgemeine Lösung

$$y_1(x) = c \cdot e^{a_1 x} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

2. Diese Lösungsgesamtheit für y_1 setzen wir in die zweite Zeile von (*) ein und erhalten die DG

$$y_2' = b_2 \cdot y_2 + a_2 \cdot c \cdot e^{a_1 x}.$$

Dies ist eine skalare, nun inhomogene lineare DG erster Ordnung für die Funktion y_2, die wir durch Variation der Konstanten lösen können.

Ist $b_1 \neq 0$, so führen wir folgendermaßen:

$\boxed{1.}$ Wir differenzieren die erste Gleichung in (*) und erhalten

$$y_1'' = a_1 \cdot y_1' + b_1 \cdot y_2'.$$

In diese Gleichung setzen wir für den Ausdruck y_2' die zweite Zeile aus (*) ein und erhalten

$$y_1'' = a_1 \cdot y_1' + b_1 \cdot [a_2 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2]$$
$$\Updownarrow$$
$$y_1'' = a_1 \cdot y_1' + a_2 b_1 \cdot y_1 + b_2 b_1 \cdot y_2.$$

2. Wir entnehmen der ersten Zeile von Gleichung (*) den Ausdruck

$$b_1 \cdot y_2 = y_1' - a_1 \cdot y_1$$

und setzen ihn in die letzte Gleichung ein.

3. Wir gewinnen damit die Gleichung

$$\begin{aligned} y_1'' &= a_1 \cdot y_1' + a_2 b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot (y_1' - a_1 y_1) \\ &= \underbrace{(a_1 + b_2)}_{=:K_1} \cdot y_1' + \underbrace{(a_2 b_1 - b_2 a_1)}_{=:K_0} \cdot y_1 . \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um eine homogene lineare DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten K_0 und K_1 für die Funktion $y_1(x)$. Diese lösen wir mit dem Mitteln, die wir in Abschnitt 14.3 kennen lernen werden.

4. Die Lösungen für $y_2(x)$ ergeben sich dann aus der ersten Zeile von (*):

Wir lösen nach $y_2(x)$ auf (was wegen $b_1 \neq 0$ auch möglich ist) und erhalten dann mit der eben ermittelten allgemeinen Lösung für y_1:

$$y_2 = \frac{y_1' - a_1 \cdot y_1}{b_1}.$$

Ist im linearen System der Form

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{r}(x)$$

die Funktion $\vec{r}(x)$ nicht konstant Null, handelt es sich also bei mindestens einer der Komponentenfunktionen $r_1(x)$ oder $r_2(x)$ nicht um die Nullfunktion, so liegt ein inhomogenes System vor.

Ohne Beweis sei abschließend kurz das theoretische Vorgehen zur Lösung solcher Systeme skizziert (das dahinter stehende Prinzip hat dabei auch für Systeme mit mehr als zwei Gleichungen Bestand und erinnert an das Lösen inhomogener linearer Gleichungssysteme).

- Wir ersetzen die gegebenen Funktionen $r_1(x)$ und $r_2(x)$ zunächst durch $r_1(x) = r_2(x) \equiv 0$ und ermitteln daraus zwei Lösungen

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

von $\vec{y}\,' = A(x) \cdot \vec{y}$, für welche die Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) \\ f_2(x) & g_2(x) \end{vmatrix}$$

an einer beliebig gewählten Stelle $x_0 \in I$ einen von Null verschiedenen Wert annimmt.

- Danach ist „nur noch“ eine beliebige Lösung $\vec{y}_{inhom}(x)$ der ursprünglich gegebenen inhomogenen DG zu bestimmen.

  In Einzelfällen gelingt dies durch Raten; im Allgemeinen muss diese jedoch durch Verfahren bestimmt werden, die aus einer Art Variation der Konstanten bestehen.

- Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung setzt sich dann zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen DG plus einer bestimmter Lösung der inhomogenen DG, kurz

$$\boxed{\vec{y}(x) = c_1 \cdot \vec{f}(x) + c_2 \cdot \vec{g}(x) + \vec{y}_{inhom}(x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).}$$

§14.2 Lineare skalare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Wir beginnen unsere Untersuchungen wieder mit dem homogenen Fall, d.h. der Gleichung

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = 0$$

mit auf einem Intervall I definierten stetigen Funktionen $a_0(x)$ und $a_1(x)$.

Um die Resultate aus §14.1 anwenden zu können, wollen wir hier eine skalare DG zweiter Ordnung in ein zweikomponentiges lineares System erster Ordnung transformieren.

Dies bietet vor allem theoretische Vorteile; insbesondere gewinnen wir daraus Informationen über die Lösungsgesamtheit.

Wir definieren zwei Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ durch

$$\begin{aligned} y_1(x) &:= y(x) \\ y_2(x) &:= y'(x) \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = y_1'(x). \end{aligned}$$

Durch Ableiten der zweiten Gleichung erhalten wir die Beziehung $y_2' = y''(x)$.

Zusammen mit der Ausgangsgleichung erhalten wir insgesamt das System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= -a_0(x) \cdot y_1(x) - a_1(x) \cdot y_2(x). \end{aligned}$$