Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 20

13. Juli 2010

Kapitel 14. Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

§14.2 Lineare skalare Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Fortsetzung)

Das System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &:= y_2(x) \\ y_2'(x) &:= -a_0(x) \cdot y_1(x) - a_1(x) \cdot y_2(x) \end{aligned} \tag{14.2.1}$$

ist äquivalent zur DG

$$y'' + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y = 0. \tag{14.2.2}$$

Für jede Lösung $y(x)$ der Gleichung (14.2.2) ist das Paar

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

gemäß unserer Herleitung eine Lösung des Systems (14.2.1).

Löst umgekehrt ein Paar

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

das System (14.2.1), so ist

$$y_1(x)$$

eine Lösung der skalaren DG (14.2.2).

Als Fazit halten wir fest:

Um die skalare DG (14.2.2) zu lösen, können wir stattdessen äquivalent das System (14.2.1) lösen und die erste Komponente

$$y_1(x)$$

jeder Lösung hiervon als Lösung unseres Ausgangsproblems (14.2.2) festsetzen.

Von jeder Lösung des Systems ist also jeweils die erste Komponente eine Lösung unseres Ausgangsproblems. Nur diese Komponente ist relevant.

Satz 72. (Lösungsgesamtheit)

Zu einer linearen homogenen (skalaren) DG

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = 0 \qquad (*)$$

zweiter Ordnung mit stetigen, auf einem gemeisamen Intervall I definierten Funktionen $a_1(x)$ und $a_0(x)$ lässt sich stets ein Fundamentalsystem aus genau zwei Lösungen,

$$f(x) \qquad \text{und} \qquad g(x),$$

finden.

Satz 72. (Fortsetzung)

Darunter verstehen wir zwei Lösungen $f(x)$ und $g(x)$ der DG (*) mit Wronski-Determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

für ein beliebiges $x_0 \in I$ (und damit für alle $x \in I$).

Die allgemeine Lösung $y(x)$ von (*) lässt sich dann als Linearkombination der beiden Lösungen $f(x)$ und $g(x)$ schreiben, d.h. es ist

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})}.$$

Um die partikuläre Lösung eines AWP

$$\begin{aligned} &y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = 0, \\ &y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_1 \end{aligned} \tag{14.2.3}$$

für gegebene Werte x_0, y_0, y_1 zu erhalten, gehen wir folgendermaßen vor:

1. Haben wir ein Fundamentalsystem $\{f(x), g(x)\}$ ermittelt und die allgemeine Lösung zu

$$y(x) = c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

aufgestellt

2. Müssen wir die Konstanten c_1 und c_2 so bestimmt werden, dass sie das lineare 2×2-Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \mathbf{c}_1 \cdot f(x_0) + \mathbf{c}_2 \cdot g(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) &= \mathbf{c}_1 \cdot f'(x_0) + \mathbf{c}_2 \cdot g'(x_0) = y_1 \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} f(x_0) & g(x_0) & y_0 \\ f'(x_0) & g'(x_0) & y_1 \end{array} \right)$$

lösen.

3. Wegen

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

fúr alle $x \in I$, insbesondere auch für x_0, ist dieses LGS eindeutig lösbar. Das AWP (14.2.3) besitzt eine eindeutige Lösung.

Der Fall von skalaren linearen homogenen DG höheren Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y = 0 \quad (14.2.4)$$

lässt sich analog behandelt.

- Ein Fundamentalsystem von (14.2.4) besteht dann aus m Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ mit Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_m''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \ldots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

für ein $x_0 \in I$ und damit für alle $x \in I$.

- Die allgemeine Lösung von (14.2.4) erhalten wir als die Menge aller Linearkombinationen der Funktionen $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ zu

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \cdots + c_m \cdot f_m(x)}.$$

- Eine eindeutige bestimmte Lösung des AWP

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y = 0$$
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots \quad y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1}$$

mit vorgegebenen Werten $y_0, \ldots, y_{m-1}$ erhalten wir durch Lösen des $m \times m$-LGS

$$\left(\begin{array}{cccc|c} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) & y_0 \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m'(x) & y_1 \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_m''(x) & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \ldots & f_m^{(m-1)}(x) & y_m \end{array}\right)$$

Haben wir es mit einer DG

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y = b(x)$$

zu tun mit $b(x) \neq 0$, so liegt eine inhomogene lineare DG der Ordnung n vor.

- Um diese zu lösen, haben wir erst die allgemeine Lösung der homogenen Variante (man setze $b(x) \equiv 0$) zu bestimmen.
- Errät man dann eine beliebige Lösung $y_{inhom}(x)$ der inhomogenen DG oder bestimmt diese durch Verfahren wie etwa der Variation der Konstanten.
- Die allgemeine Lösung $y(x)$ der inhomogenen DG lässt sich darstellen durch

$$\boxed{y(x) = \text{allg. Lösung der homogenen DG} + y_{inhom}(x)}.$$

§14.3 Gewöhnliche lineare DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten und analysieren im Folgenden einen wichtigen Spezialfall linearer DG zweiter Ordnung

$$a_2(x) \cdot y'' + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = b(x).$$

In diesem Abschnitt wollen wir annehmen, dass die Koeffizienten $a_2(x), a_1(x)$ und $a_0(x)$ nicht mehr von x abhängen, sondern konstant sind. Wir haben es somit mit einer DG der Form

$$a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b(x)$$

zu tun.

Insbesondere handelt es sich bei dem in den letzen Abschnitten erwähnten gemeinsamen Definitionsbereich I der Koeffizientenfunktionen um ganz $\mathbb{R}$.

Wieder dürfen wir in diesem Abschnitt von $a_2 \neq 0$ ausgehen, denn andernfalls läge keine Gleichung zweiter, sondern nur erster Ordnung vor.

Nachfolgend entwickeln wir eine Strategie zur Lösung der homogenen Gleichung

$$a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0.$$

Gemäß dem Satz 72 versuchen wir, ein Fundamentalsystem

$$\{y_1(x), y_2(x)\}$$

dieser linearen DG zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten herzuleiten.

Die Erfahrungen mit der linearen DG erster Ordnung lassen uns dabei als Lösungskandidat eine Funktion der Gestalt

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

mit einem „geeigneten “λ vermuten.

Es gilt nun, besagtes λ so zu bestimmen, dass die so angesetzte Funktion $y(x)$ tatsächlich die DG

$$a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

löst.

Wir leiten dazu zwei Mal ab:

$$y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x} \quad \text{sowie} \quad y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$$

und setzen dies in die zu lösende DG ein, was auf die Bedingung

$$a_2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + a_1 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_0 \cdot e^{\lambda x} = 0$$

führt.

Da in jedem Fall $e^{\lambda x} \neq 0$ gilt, können wir diese Gleichung durch $e^{\lambda x}$ dividieren und erhalten somit eine Bedingung on λ:

Genau dann erfüllt der Lösungskandidat $y(x) = e^{\lambda x}$ die DG

$$a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0,$$

wenn für λ die Gleichung

$$\boxed{a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0} \tag{14.3.1}$$

erfüllt ist.

Die quadratische Gleichung (14.3.1) wird auch als charakteristische Gleichung bezeichnet.

Als quadratische Gleichung besitzt (14.3.1) zwei Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \in \mathbb{C}.$$

Abhängig vom Vorzeichen der Diskriminante

$$d = a_1^2 - 4a_2a_0$$

sind diese Lösungen reel ($d > 0$) oder echt komplex ($d < 0$) oder fallen gar zu einer einzigen Lösung zusammen ($d = 0$).

Wir unterscheiden diese drei Fälle und schildern jeweils das Verfahren zur Gewinnung eines Fundamentalsystems, also zweier Funktionen $y_1(x), y_2(x)$, welche die DG lösen mit

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und damit für alle $x \in \mathbb{R}$.

Gemäß §14.2 lässt sich daraus bereits die allgemeine Lösung von

$$a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

darstellen.

Fall $d = a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$

In diesem Fall erhalten wir für λ zwei verschiedene reelle Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Damit erfüllen die beiden Funktionen

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

die zu lösende DG

$$a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0.$$

Fall $d = a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ (Fortsetzung)

Wir prüfen, dass die Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem bilden. Wir berechnen die Wronski-Determinante: es ist

$$y_1'(x) = \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad y_2'(x) = \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

und damit

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}.$$

Fall $d = a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ (Fortsetzung)

Speziell (beispieweise) für $x_0 = 0$ also

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$$

wegen der Verschiedenheit von λ_1 und λ_2.

Die beiden Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ bilden folglich ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung lässt sich somit darstellen als die Schar

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$

In diesem Fall ergibt die charakteristische Gleichung nur eine Lösung

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm 0}{2a_2} = -\frac{a_1}{2a_2}.$$

Damit haben wir immerhin eine Lösung der DG gefunden zu

$$y_1(x) = e^{\lambda x} = e^{-a_1 x/(2a_2)},$$

doch handelt es sich eben nur um eine Lösung.

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ (Fortsetzung)

Für ein Fundamentalsystem unserer DG zweiter Ordnung benötigen wir noch zweite Lösung $y_2(x)$ mit

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

für ein x_0 (und damit für alle $x \in \mathbb{R}$).

Wir behaupten, dass es sich bei der Funktion

$$y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$$

tatsächlich um eine solche Lösung handelt.

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ (Fortsetzung)

Setzen wir $y_2(x)$ in die DG ein, so erhalten wir

$$a_2 \cdot y_2''(x) + a_1 \cdot y_2'(x) + a_0 \cdot y_2(x) =$$

$$a_2 \cdot \left(\lambda^2 x + 2\lambda\right) + a_1 \cdot (1 + \lambda x)\, e^{\lambda x} + a_0 \cdot xe^{\lambda x} =$$

$$e^{\lambda x} \left[x \underbrace{a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0}_{=0} + \underbrace{2\lambda a_2 + a_1}_{=0} \right] = 0.$$

Damit haben wir beweisen, dass $y_2(x)$ die DG löst.

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ (Fortsetzung)

Um zu zeigen, dass $y_2(x)$ zusammen mit $y_1(x)$ eine Fundamentalsystem bildet, berechnen wir die zugehörige Wronski-Determinante, beispielweise an der Stelle $x_0 = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Damit bilden $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem.

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2 a_0 = 0$ (Fortsetzung)

Mit

$$\lambda = -\frac{a_1}{2a_2}$$

besteht die allgemeine Lösung in diesem Fall aus der Schar

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 \cdot x)\, e^{\lambda x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$

In diesem Fall liefert die charakteristische Gleichung keine reelle Lösungen. Vielmehr erhalten wir die beiden komplexen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} = \frac{1}{2a_2}\left(-a_1 \pm \sqrt{(-1)\cdot(-a_1^2 + 4a_2a_0)}\right)$$

$$= \frac{1}{2a_2}\left(-a_1 \pm i \cdot \sqrt{\underbrace{-a_1^2 + 4a_2a_0}_{>0}}\right).$$

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ (Fortsetzung)

Es handelt sich um konjugiert komplexe Nullstellen der charakteristischen Gleichung.

Führen wir die Abkürzungen

$$\alpha := -\frac{a_1}{2a_2} \quad \text{und} \quad \beta := \frac{\sqrt{-a_1^2 + 4a_2a_0}}{2a_2} = \frac{\sqrt{-d}}{2a_2}$$

ein, so formulieren sich diese zu

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \cdot \beta.$$

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ (Fortsetzung)

Wir erhalten die beiden komplexwertigen Lösungsfunktionen

$$z_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + i\beta x)} \quad \text{und} \quad z_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha - i\beta x)}.$$

Diese Funktionen sind Lösungen der DG; wie oben lässt sich durch Aufstellen der Wronski-Determinanten zeigen, dass diese ein (komplexes) Fundamentalsystem bilden. Demnach lässt sich die allgemeine komplexe Lösung darstellen durch

$$y(x) = c_1 \cdot z_1(x) + c_2 \cdot z_2(x) = c_1 \cdot e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 \cdot e^{(\alpha - i\beta)x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ (Fortsetzung)

Wir wollen jetzt ein reelles Fundamentalsystem $\{y_1(x), y_2(x)\}$ zu ermitteln.

Betrachten wir dazu die Lösung $z_1(x)$ etwas genauer:

$$z_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + i \cdot [e^{\alpha x}\sin(\beta x)] .$$

Das $z_1(x)$ die DG löst, trifft dies ebenso sowohl auf den Realteil als auch auf den Imaginärteil von $z_1(x)$ zu, also auf

$$y_1(x) := \operatorname{Re} z_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x), y_2(x) := \operatorname{Im} z_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ (Fortsetzung)

Wir weisen nach, dass es sich bei diesen beiden Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ um ein (nun reelles) Fundamentalsystem handelt und analysieren dazu die Wronski-Determinante.

Wir werten die Wronski-Determinante wieder an der Stelle $x_0 = 0$ aus:

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta \neq 0.$$

Fall: $d = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ (Fortsetzung)

Damit ist $\{y_1(x), y_2(x)\}$ ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung lässt sich darstellen als die Schar

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

mit nun reellen Scharkonstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.