Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 3

4. Mai 2010

Kapitel 7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

§7.3 Die Integrabilitätskriterium

Wir wollen ein Kriterium finden, welches uns in die Lage versetzt zu entscheiden, ob ein gegebenes, differenzierbares Vektorfeld

$$\vec{f}(x_1, \ldots, x_n)$$

eine Stammfunktion besitzt.

Zudem wollen wir im Fall der Existenz diese auch berechnen können.

$n = 2$

Sei

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Von einer potenziellen zwei Mal differenzierbaren Stammfunktion $F(x,y)$ mit

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = f_1(x,y) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = f_2(x,y)$$

sollten wir erwarten können, dass der Satz von Schwarz gilt, also

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\right).$$

$n = 2$ (Fortsetzung)

Bzw.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y).} \tag{7.3.1}$$

Vektorfelder $\vec{f}(x, y)$, welche diese Eigenschaft nicht aufweisen, besitzen auch keine Stammfunktion!

Dies steht im Gegensatz zum Fall von Funktionen $f(x)$ einer Veränderlichen, wo selbst zu jeder nur stetigen Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion existiert.

Mit der so genannten Integrabilitätsbedingung (7.3.1) haben wir also ein notwendiges Kriterium zur Existenz von Stammfunktionen gefunden.

Frage:

Ist die Integrabilitätsbedingung (7.3.1) auch **hinreichend** dafür, dass $\vec{f}(x, y)$ eine Stammfunktion besitzt?

Glücklicherweise kann diese Frage bejaht werden, sofern die Komponentenfunktionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ nur auf einer hinreichend „schönen“Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ definiert sind.

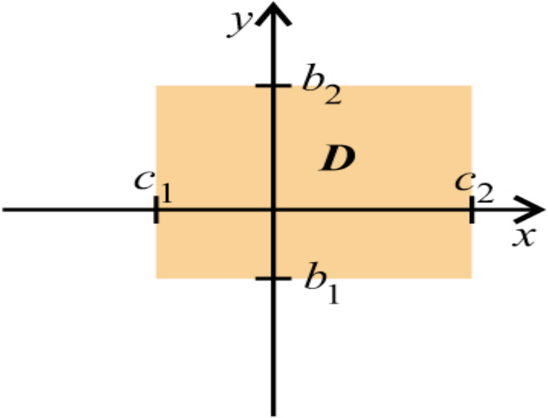
Wir betrachten hier nur einen Spezialfall und wollen im Folgenden voraussetzen,

dass es sich bei besagtem Definitionsbereich um ein **Rechteck** handelt,

d.h. der Definitionsbereich D besitze die Form

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; c_1 < x < c_2, \quad b_1 < y < b_2\right\},$$

Die extremen Werte $\pm\infty$ sind hier durchaus zugelassen.



Rechteckiger Definitionsbereich

Satz 49. (Integrabilitätskriterium)

Gegeben sei ein auf einem recheckigen Gebiet des $\mathbb{R}^2$ *definiertes Vektorfeld*

$$\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen $f_1(x,y)$ *und* $f_2(x,y)$ *seien partiellen differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Dann besitzt das Vektorfeld* $\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *genau dann eine Stammfunktion, wenn für alle Punkte* (x,y) *des Rechteckgebiets gilt*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y)}.$$

Auch für n-komponentige Vektorfelder von jeweils n Variablen gilt ein analoges Kriterium:

$n \geqslant 3$

Ein Vektorfeld

$$\vec{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \vec{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

mit partiell differenzierbaren Funktionen $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$ und stetigen partiellen Ableitungen besitzt genau dann eine Stammfunktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$\operatorname{grad} F(x_1, \ldots, x_n) = \vec{f}(\bar{\mathbf{x}}),$$

$n \geqslant 3$ (Fortsetzung)

wenn

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)} \tag{7.3.2}$$

für alle Indizes i, j mit $1 \leqslant i, j \leqslant n$ gilt.

In Differenzialschreibweise ausgedrückt:

$n \geqslant 3$

Es ist

$$f_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n)dx_n$$

genau dann das totale Differential einer Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$, wenn (7.3.2) gilt.

Als einfaches Rezept halten wir also fest:

1. Man differenziere eine jede Funktion f_i nach einer Variablen x_j und dann umgekehrt die Funktion f_j nach x_i.
2. Stimmen diese beiden Ausdrücke in jedem Fall überein, liegt ein Gradientenfeld bzw. ein totales Differential vor.

Beispiel 7.3.1

Speziell für $n = 3$ handelt sich es sich bei $\vec{f}(\bar{\mathbf{x}})$ genau dann um ein Gradientenfeld, wenn die drei Gleichungen

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3),$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3),$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3).$$

bestehen.

Beispiel 7.3.1 (Fortsetzung).

In einen Vektor zusammengefasst ist dies gleichbedeutend mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}}_{\operatorname{rot} \vec{f}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 69.

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

wird als die Rotation des Vektorfeldes $\vec{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *bezeichnet und mit*

$$\operatorname{rot} \vec{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

abgekürzt.

Bemerkungen.

- Verschwindet also die Rotation zu null, so liegt ein Gradientenfeld bzw. ein totales Differential vor.
- Gradientenfelder für $n = 3$ werden daher auch rotationsfrei genannt.

§7.4 Berechnung von Stammfunktionen

Satz 50. (Berechnung einer Stammfunktion)

Das auf einem Recheck definierte Vektorfeld

$$\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

sei partiell differenzierbar mit stetigen Ableitungen und besitze eine Stammfunktion. Dann ist eine (bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte) Stammfunktion $F(x,y)$ gegeben durch

$$\boxed{F(x,y) = \int_{a_1}^{x} f_1(t,a_2)dt + \int_{a_2}^{y} f_2(x,t)dt,} \qquad (7.4.1)$$

wobei die Zahlen a_1 und a_2 beliebig wählbar sind, sofern der Punkt (a_1, a_2) im Definitionsbereich liegt.

Bemerkungen.

- Der Integrand $f_1(t, a_2)$ wird als Funktion in der ersten Variablen t aufgefasst, d.h. das zweite Argument wird (ähnlich der partiellen Differentiation) auf den Wert $y = a_2$ fixiert.
- Analog haben wir zur Berechnung des zweiten Integrals in Integranden $f_2(x, t)$ das erste Argument auf x zu fixieren und die Integration bezüglich der verbleibenden Variablen t durch zuführen.

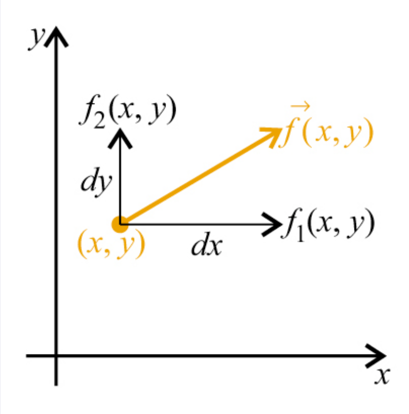
§7.5 Das Kurvenintegral für beliebige Differentiale

Beispiel 7.5.1

Auf ein Teilchen wirke an einer Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine Kraft

$$\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 7.5.1 (Fortsetzung)



Zur differentiellen Arbeit

Beispiel 7.5.1 (Fortsetzung)

Denken wir uns die Kraft $\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in ihre beiden Einzelkomponenten zerlegt, so haben wir bei einer Verschiebung des Teilchens aus der Position (x, y) um die Strecken dx und dy die Arbeit ∂W zu leisten, die durch den Wert

$$\partial W(x, y) = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$$

angenähert werden kann, sofern dx und dy hinreichend klein sind.

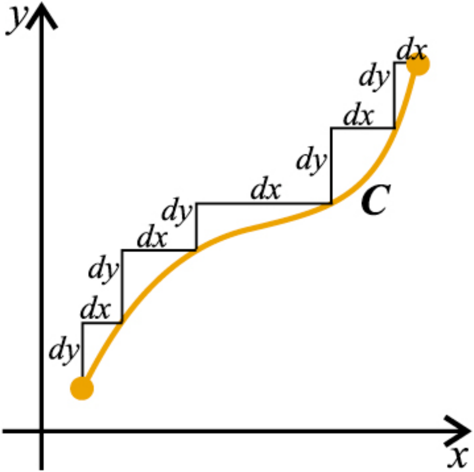
Frage:

Wie stellt sich die Situation im Beispiel 7.5.1 aber dar, wenn wir das Teilchen nicht nur um winzige Stückchen dx und dy in x- und y-Richtung verschieben, sondern entlang einer Kurve?

Wir stellen uns damit die Frage nach der Gesamtarbeit, die im Zuge der Verschiebung entlang dieser Kurve aufzuwenden ist.

Eine (theoretische) Strategie könnte darin bestehen:

1. die gegebene Kurve C durch eine Folge von Verschiebungen dx und dy anzunähern
2. und dann sämtliche gegebene Arbeiten ∂W aufzusummieren.



Approximationsstrategie

Verfeinert man die *dx* und *dy* immer weiter, so erhalten wir im Grenzwert die gesuchte Gesamtarbeit, die wir mit

$$\int_C \partial W(x, y)$$

notieren. Summation wird dabei zur Integration.

Die Gesamtarbeit können wir dann schreiben als

$$\int\limits_C \partial W(x,y) = \int\limits_C f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy.$$

Wir nennen es das Kurvenintegral (Wegintegral) von $\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ entlang der Kurve C.

Bemerkung.

Die Kurve C muss im Definitionsbereich der Funktionen f_1, f_2 liegen.