Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 4

27. April 2010

- 1. Klausur: Fr., 08.10.2010, 9-11 Uhr
- Die Themen der Klausuren umfassen den gesamten Vorlesungsstoff
- Bitte beachten Sie: Die Anmeldung zu den Klausuren erfolgt über das HISPOS-System. Eine Teilnahme an einer Klausur setzt eine Anmeldung via HISPOS voraus! Die Anmeldefrist endet zwei Wochen vor dem jeweiligen Klausurtermin, Wer bis zu diesem Termin nicht im HISPOS angemeldet ist, kann an der jeweiligen Klausur nicht teilnehmen!

Kapitel 7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

§7.5 Das Kurvenintegral für beliebige Differentiale (Fortsetzung)

Wir wollen das Kurvenintegral

$$\int_C f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy \tag{7.5.1}$$

genauer zu definieren.

Gleichzeitig wird uns dies eine Anleitung an die Hand geben, das Kurvenintegral praktisch zu berechnen.

$\boxed{1.}$ Als Erstes benötigen wir eine beliebige (!!!) Parametrisierung $\vec{p}(t)$ der Kurve C:

Für

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [a, b]$$

lassen sich die formalen Idetitäten

$$\frac{dx}{dt}(t) = x'(t), \qquad \frac{dy}{dt}(t) = y'(t)$$

umformen zu

$$dx = x'(t)dt, \qquad dy = y'(t)dt. \tag{7.5.2}$$

$\boxed{2.}$ Das Kurvenintegral (7.5.1) kann dann folgendenrmaßen auf ein gewöhnliches Integral bezüglich des Kurvenparameters t zurückgeführt werden:

$$\int_C f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$$

$$= \int_a^b f_1(x(t),y(t)) \cdot x'(t)dt + f_2(x(t),y(t)) \cdot y'(t)dt$$

$$= \int_a^b \left[f_1(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + f_2(x(t),y(t)) \cdot y'(t) \right] dt$$

Definition 70.

Gegeben sei eine differenzierbare Kurve C mit Parametrisierung

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [a, b]$$

(die im Definitionsbereich von f_1 und f_2 verlaufe). Dann ist das Kurvenintegral von $\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ *entlang der Kurve C gegeben durch*

Definition 70 (Fortsetzung).

$$\boxed{\begin{aligned}\int_C f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy \\ = \int_a^b \left[f_1(x(t),y(t))\cdot x'(t) + f_2(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right] dt\end{aligned}}$$

Beispiel 7.5.2.

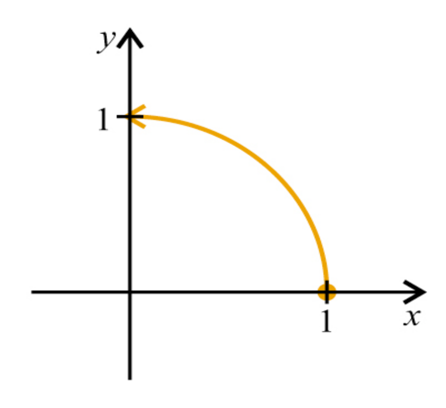
Wir berechnen das Kurvenintegral

$$\int_K \underbrace{(x+y)}_{f_1(x,y)}\,dx + \underbrace{(y-x)}_{f_2(x,y)}\,dy$$

entlang des ersten Viertelkreis K mit der Parametrisierung

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Beispiel 7.5.2 (Fortsetzung).



Viertelkreis K als Integrationsweg

Beispiel 7.5.2 (Fortsetzung).

Es ist

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = -\sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = y'(t) = \cos t.$$

Das gesuchte Kurvenintegral berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned}
&\int_K f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy \\
&= \int_0^{\pi/2} [(\cos t + \sin t) \cdot (-\sin t) + (\sin t - \cos t) \cdot \cos t]\, dt \\
&= -\int_0^{\pi/2} \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1}\, dt = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

In anderen Beispiel betrachten wir das gleiche Differential

$$(x + y)dx + (y - x)dy,$$

integrieren dieses aber entlang eines anderen Weges.

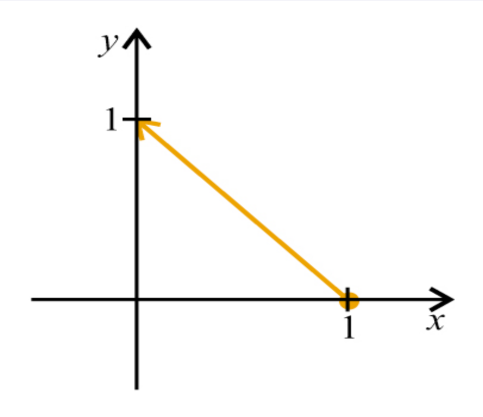
Beispiel 7.5.3

Wir betrachten das Kurvenintegral

$$\int_S (x+y)dx + (y-x)dy$$

entlang der Strecke S, welche vom Punkt $(1,0)$ ausgehe und im Punkt $(0,1)$ ende.

Beispiel 7.5.3 (Fortsetzung).



Strecke S als Integrationsweg

Beispiel 7.5.3 (Fortsetzung).

Eine Parametrisierung der Strecke S ist gegeben durch

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1].$$

Es ist also

$$x'(t) = -1, \qquad y'(t) = 1.$$

Das gesuchte Kurvenintegral berechnet sich für diesen Fall zu

$$\int_S (x+y)dx + (y-x)dy$$
$$= \int_0^1 [(1-t+t)\cdot(-1) + (t-(1-t))\cdot 1]\, dt = -1.$$

Obwohl die beiden Wege K und S, Viertelkreis und Strecke, jeweils den gleichen Start- und Endpunkt besaßen, ergaben sich für die beiden Kurvenintegrale

$$\int_K (x+y)dx + (y-x)dy \quad \text{und} \quad \int_S (x+y)dx + (y-x)dy$$

verschiedene Werte.

Das Kurvenintegral ist im Allgemeinen wegabhängig, d.h. es spielt eine signifikante Rolle, auf welchem Weg man sich von einem Start- zu einem Zielpunkt bewegt.

Folgendes ist beim Rechnen mit Kurvenintegralen zu beachten:

- Das Ergebnis für das Kurvenintegral ist unabhängig davon, welche Parametrisierung $\vec{p}(t)$ man für die Kurve C wählt.

- Das Kurvenintegral ist orientiert, was folgendermaßen zu verstehen ist:

  Durchlaufen wir die Kurve C in entgegengesetzter Richtung, berechnen wir das Kurvenintegral

  $$\int_{-C} f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$$

  mit der entgegengesetzt orientierten Kurve C, so erhalten wir

  $$\int_{-C} f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = -\int_{C} f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy.$$

§7.6 Das Kurvenintegral für totale Differentiale

Satz 51.

Liegt mit

$$f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$$

ein totales Differential vor (bzw. handelt sich bei

$$\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

um ein Gradientenfeld), so hängt der Wert des Kurvenintegrals

$$\int_C f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$$

nur vom Anfangspunkt $\vec{a} = (a_1, a_2)$ *und Endpunkt* $\vec{b} = (b_1.b_2)$ *der Kurve C ab.*

Satz 51 (Fortsetzung)

Es berechnet sich in diesem Fall zu

$$\boxed{\int_C f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = F(b_1,b_2) - F(a_1,a_2),} \tag{7.6.1}$$

wobei $F(x,y)$ eine (beliebige) Stammfunktion von $\vec{f}$ ist.

Beweis.

Um Satz 51 zu beweisen, differenzieren wir die Funktion

$$g(t) := F(x(t), y(t))$$

mit Hilfe der Kettenregel nach t: Es ist

$$g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t)$$

bzw. wegen $F_x = f_1$ und $F_y = f_2$

$$g'(t) = f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t). \tag{7.6.2}$$

Der Ausdruck $f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t)$ ist gerade der Integrand über welchen wir das Kurvenintegral definiert hatten. Er ist damit

$$\begin{aligned}
\int_C f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy& \\
&\stackrel{Def}{=} \int_a^b \left(f_1(x(t), y(t))x'(t) + f_2(x(t), y(t))y'(t)\right) dt \\
&\stackrel{(7.6.2)}{=} \int_a^b g'(t)dt \\
&\stackrel{Hauptsatz}{=} g(b) - g(a) = F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a))
\end{aligned}$$

Hinter den Punkten

$$\vec{a} := (x(a), y(a)) = (a_1, a_2), \qquad \vec{b} := (x(b), y(b)) = (b_1, b_2)$$

vergiben sich gerade Start- und Endpunkt der zugrunde liegenden Kurve C.

$\square$

Bemerkung.

- Formel (7.6.1) zeigt zudem deutlich die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals im Fall eines totalen Differentials.
- Sein Wert hängt lediglich vom Startpunkt $\vec{a}$ und Endpunkt $\vec{b}$ der Kurve ab.
- Wie die Kurve zwischen diesen beiden Punkten verläuft, spielt keine Rolle!