Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 6

4. Mai 2010

Definition 69.

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

wird als die Rotation des Vektorfeldes $\vec{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *bezeichnet und mit*

$$\operatorname{rot} \vec{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

abgekürzt.

Teil II Lineare Algebra

Kapitel 8. Vektoren

§8.1. Betrag und Skalarprodukt

Definition 72.

Wir erklären das Objekt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

mit den n Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *als einen n-dimensionalen reellen Vektor.*

Wir erklären die Addition zweier n-dimensionaler Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ durch

$$\boxed{\vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} x_1+y_1\\ x_2+y_2\\ \vdots\\ x_n+y_n \end{pmatrix}}.$$

Entsprechend erklären wir die Vervielfachung eines n-dimensionalen Vektors mit einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ durch

$$\boxed{c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix}}.$$

- Was die Subtraction zweier Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ betrifft, so lässt sich diese (rein formal) zu

  $$\vec{p} - \vec{q} := \vec{p} + (-1)\vec{q}$$

  einführen.

- Die Gesamtheit aller n-dimensionalen Vektoren bildet zusammen mit den so definierten Rechenoperationen einen Vektorraum, den wir als $\mathbb{R}^n$ bezeichnen.

  Als Spezialfälle sind uns vor allem die Zahlengerade $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, die Ebene $\mathbb{R}^2$ sowie der dreidimensionale Raum $\mathbb{R}^3$ bereits begegnet bzw. bekannt.

Für beschriebenden Operationen lassen sich unmittelbar die folgenden Rechengesetze verifizieren:

Satz 53 (Rechengesetze).

Es seien $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $(\vec{p} + \vec{q}) + \vec{r} = \vec{p} + (\vec{q} + \vec{r})$ (*Assoziativgesetz*)

b) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$ (*Kommutativgesetz*)

c) $c \cdot (\vec{q} + \vec{p}) = c \cdot \vec{q} + c \cdot \vec{p}$ (*Distributivgesetz*)

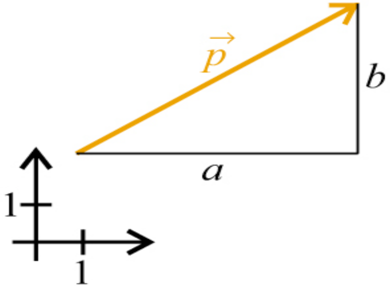
Bemerkungen.

- Das Assoziativgesetz besagt, dass die Addition dreier Vektoren beliebig gruppiert vorgenommen werden kann.
- Die Reihenfolge spielt keine Rolle, was gerade das Kommutativgesetz entspricht.
- Wichtige prominente Vertreter von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind die so genannten kanonischen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir den Vektor

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Länge oder Betrag eines Vektors

Wie wir mit Hilfe des dort dargestellten rechtwinkligen Dreiecks erkennen, ist seine Länge $|\vec{p}|$ nach dem Satz des Pythagoras gegeben durch

$$|\vec{p}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Wir wollen dies auf Vektoren des $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern:

Definition 73.

Wir definieren den Betrag, die Länge oder die euklidische Norm eines Vektors

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

durch die Zahl

$$\boxed{|\vec{x}| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.}$$

Bemerkungen.

- Der Betrag eines Vektors ist immer größer oder gleich null.
- Nur im Fall $\vec{x} = \vec{0}$ nimmt der Betrag den Wert null an.
- Für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

$$|c \cdot \vec{v}| = |c| \cdot |\vec{v}|.$$

Dividieren wir einen Vektor $\vec{x}$ der Länge $l = |\vec{x}|$ durch seine eigene Länge, so besitzt der durch $|\vec{x}|$ dividierte Vektor

$$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

die Länge 1.

Ein solcher Vektor wird auch als Einheitsvektor oder als ein auf die Länge 1 normierter Vektor bezeichnet.

Definition 74.

Unter dem (kanonischen, euklidischen) Skalarprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^n$ verstehen wir die Operation, welche zwei Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

eine reelle Zahl zuordnet und durch

$$\boxed{\vec{x} \bullet \vec{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}$$

definiert ist.

Auch die Bezeichnung „inneres Produkt" ist hier geläufig.

Bemerkungen.

- Das $\bullet$-Zeichen wird bisweilen auch durch ein schlichtes $\cdot$ ersetzt.
- Das Ergebnis dieser Skalarmultiplikation ist eine reelle Zahl, ein Skalar (daher der Name).
- Mit der bereits bekannten Vervielfachung von Vektoren hat dies nichts zu tun.

Satz 54 (Skalarprodukt).

Es seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\vec{x} \bullet (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \bullet \vec{y} + \vec{x} \bullet \vec{z}$,

b) $(\vec{x} + \vec{y}) \bullet \vec{z} = \vec{x} \bullet \vec{z} + \vec{y} \bullet \vec{z}$,

c) $(c \cdot \vec{x}) \bullet \vec{y} = c \cdot (\vec{x} \bullet \vec{y})$,

d) $\vec{x} \bullet (c \cdot \vec{y}) = c \cdot (\vec{x} \bullet \vec{y})$,

e) $\vec{x} \bullet \vec{y} = \vec{y} \bullet \vec{x}$ *(Symmetrie)*,

f) $\vec{x} \bullet \vec{x} = |x|^2$.

Im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ lässt sich das Skalarprodukt dazu verwenden, um den Winkel α zwischen zwei Vektoren zu berechnen

(für $n > 3$ lässt sich die folgende Aussage als Definition eines „Winkels" interpretieren).

Satz 55 (Winkelberechnung).

Es seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit $\vec{x}, \vec{y} \neq 0$, wobei $n = 2$ oder $n = 3$.

Der Cosinus des Winkels α den die beiden Vektoren einschließen, ist gegeben durch

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}}.$$

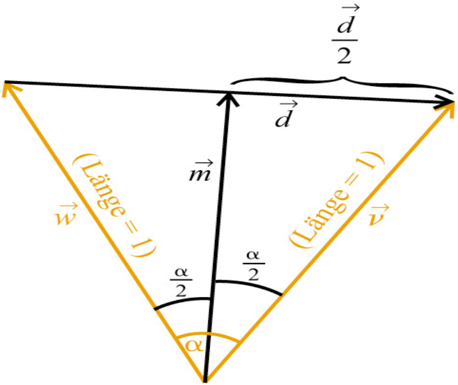
Beweis.

Wir zeigen den Satz nur für $n = 2$. Im $\mathbb{R}^3$ verläuft der Beweis analog.

Zu den gegebenen Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ seien

$$\vec{v} := \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad \text{und} \quad \vec{w} := \frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}.$$

Der Winkel α zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ bzw. zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist dabei der gleiche.



Gleichschenkliges Dreieck mit eingeschlossenem Winkel α

Wir berechnen den in der Abbildung dargestellten Mittelvektor $\vec{m}$ und den Differenzvektor $\vec{d}$ zu

$$\vec{d} = \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{m} = \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{d} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}.$$

Deren Längen berechnen sich folglich zu

$$|\vec{d}| = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2} \quad \text{und}$$

$$|\vec{m}| = \frac{1}{2}\sqrt{(v_1 + w_1)^2 + (v_2 + w_2)^2}.$$

Damit berechnen wir

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{|\vec{d}|}{2}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{2}\sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{|\vec{m}|}{|\vec{v}|} = \frac{1}{2}\sqrt{(v_1 + w_1)^2 + (v_2 + w_2)^2}.$$

Nach den Additionstheoremen berechnet sich $\cos\alpha$ zu

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{(v_1+w_1)^2+(v_2+w_2)^2}{4} - \frac{(v_1-w_1)^2+(v_2-w_2)^2}{4}$$

$$= v_1w_1+v_2w_2 = \vec{v}\bullet\vec{w} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\bullet\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|} = \frac{\vec{x}\bullet\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}.$$

$\square$

Bemerkung.

Um den Winkel α selbst zu berechnen, können wir in der Formel

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$$

zum Arccuscosinus übergehen, also

$$\alpha = \arccos\left(\cos\alpha\right) = \arccos\frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}.$$

Wir erhalten damit für α einen Winkel zwischen 0 und π bzw. zwischen 0° und 180°.

Ein Spezialfall liegt dann vor, wenn für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ des $\mathbb{R}^2$ oder des $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = 0.$$

Unter diesen Umständen gilt für den Winkel α zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ nach dem Satz 55, dass

$$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = 0$$

und damit

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ stehen in diesem Fall also senkrecht aufeinander und bilden miteinander einen rechten Winkel.

Dieser Sachverhalt lässt sich auch auf höhere Raumdimensionen verallgemeinern:

Definition 75.

Wir nennen zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ senkrecht aufeinanderstehend bzw. ***orthogonal****, wenn*

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = 0$$

gilt.

Bemerkungen.

- Dass Definition 75 für Raumdimensionen $\geqslant 4$ keine geometrische Bedeutung mehr besitzt, spielt dabei keine Rolle.
- In der Orthogonalitätsbeziehung $\vec{x} \bullet \vec{y} = 0$ hatten wir den Nullvektor nicht ausdrücklich ausgenommen.
- Per Definition ist der Nullvektor somit orthogonal zu jedem Vektor des $\mathbb{R}^n$.