Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 9

20. Mai 2010

Kapitel 9. Matrizen und Determinanten

§9.1 Matrizen

Definition 84.

Unter einer (reellen) $m \times n$-Matrix A versteht man ein rechteckiges Schema aus reellen Zahlen, die wie folgt angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sie besteht aus m Zeilen und n Spalten.

- Der erste Index der Einträge a_{ij}, welcher innerhalb einer Zeile konstant bleib, wird als Zeilenindex bezeichnet und nimmt ganzzahlige Werte von 1 bis m an.
- Der zweite Index, welcher innerhalb eine Spalte nicht ändert, wird als Spaltenindex bezeichnet und nimmt ganzzahlige Werte von 1 bis n an.
- Hinter der Zahl

  $$a_{ij}$$

  virgibt sich der Eintrag der Matrix A in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

- Matrizen selbst werden meist mit lateinischen Großbuchstaben

  $$A, B, \dots$$

  notiert und ihre Einträge mit den entsprechenden kleinen Buchstaben

  $$a_{ij}, b_{ij}$$

  dargestellt.

- Will man die Anzahl der Spalten und Zeilen der Matrizen kenntlich machen, so sind darüber hinaus die Schreibweisen

  $$\left(a_{ij}\right)_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}, \quad \left(b_{ij}\right)_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$$

  als Bezeichner von Matrizen verbreitet.

Beispiel 9.1.1

Es sei die 3×4-Matrix A gegeben durch

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,\dots,3;j=1,\dots,4} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & -12 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hierebi ist $a_{23} = -12$, $a_{12} = 5$ und $a_{31} = 1$.

- Die Anzahl der Zeilen und Spalten einer Matrix wird manchmal auch als deren Dimension bezeichnet.

  Mit dem Begriff der Dimension eines Unterraums hat dies nichts zu tun.

- Ein Spezialfall liegt vor, wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten einer Matrix übereinstimmt. In diesem Fall nennen wir die Matrix quadratisch.

- Ein Vektor des $\mathbb{R}^n$ kann rein formal auch als $n \times 1$-Matrix aufgefasst werden.

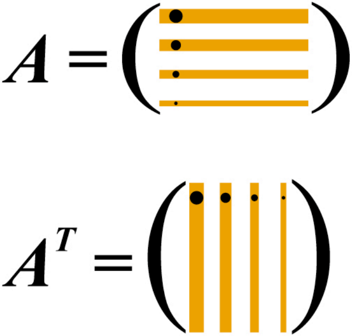
Definition 85.

Zu einer gegebenen $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

definieren wir die transponierte Matrix A^T durch

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$



Transponierte einer Matrix **A**

Bemerkungen.

- A ist $m \times n$-Matrix, A^T ist $n \times m$-Matrix.
- Die erste Zeile von A^T entspricht somit der ersten Spalte von A, die zweite Zeile von A^T der zweiten Spalte von A usw.
- Um von A die transponierte Matrix A^T zu erhalten, haben wir nur die Zeilen (oder Spalten) von A nacheinander in die Spalten (Zeilen) von A^T zu übertragen.

Beispiel 9.1.2.

Es sei die 2×3-Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf die transponierte 3×2-Matrix A^T mit

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 9.1.3.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

§9.2 Matrixoperationen

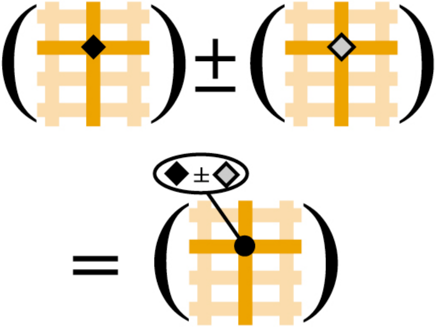
In Analoge zu Vektoren des $\mathbb{R}^n$ lässt sich für Matrizen gleicher Dimension eine Addition erklären.

Wir erklären für zwei $m \times n$-Matrizen A, B mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

die Summe von A und B durch

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$



Zur Matrixaddition

Bemerkung.

Aus der Definition von $A + B$ wird unmittelbar klar, dass die Reihenfolge der Summation von A und B keine Rolle spielt, d.h. es ist

$$\boxed{A + B = B + A}.$$

Man sagt, die Matrizenaddition sei kommutativ (vertauschbar).

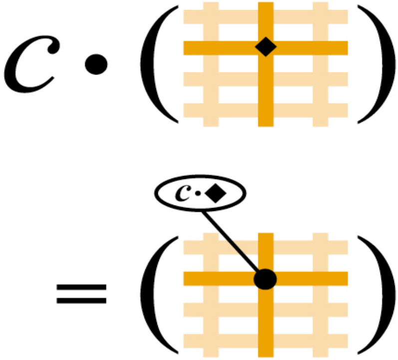
Darüber hinaus lässt sich ebenfalls analog zur Vektorrechnung eine Vervielfachung von Matrizen definieren.

Wir erklären für $m \times n$-Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und für eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ das c-fache von A durch

$$(c \cdot A) := \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & \dots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \dots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & c \cdot a_{m2} & \dots & c \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$



Zur Matrizenvielfachung

Etwas komplizierter verhält sich die Sache beider Multiplikation von Matrizen:

Um zwei Matrizen A und B miteinander multiplizieren zu können, müssen diese eine geeignete Zahl von Splaten und Zeilen aufweisen.

Gegeben sein eine

$$m \times n - \text{Matrix } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{und eine } n \times p - \text{Matrix } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix},$$

d.h. die Anzahl der Spalten von A stimme mit der Anzahl der Zeilen von B überein.

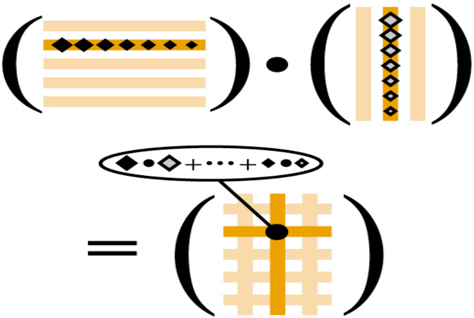
Das Ergebnis des Matrizenprodukts

$$C := A \cdot B$$

sei nun eine $m \times p$-Matrix. Die Einträge dieser Produktmatrix seien für $1 \leqslant i \leqslant m$ und $1 \leqslant j \leqslant p$ durch

$$\boxed{c_{ij} := a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

erklärt.



Zur Matrixmultiplikation

Bemerkungen.

- Um von den Matrizen A und B das Matrixprodukt $A \cdot B$ zu bilden, ist es also strikt notwendig, dass die Matrix A so viele Spalten aufweist, wie B Zeilen besitzt.

  Beispielweise lässt sich eine 3×2-Matrix A nicht mit einer 3×3-Matrix B multiplizieren.

- Wir stellen fest, dass sich ausgehend von zwei Matrizen A und B genau dann sowohl $A \cdot B$ als auch $B \cdot A$ bilden lässt, wenn es sich bei A um eine $m \times n$-Matrix und bei B um eine $n \times m$-Matrix handelt.

  Insbesondere ist diese Voraussetzung gegeben für $m = n$, d.h. für quadratische Matrizen, die ebenso viele Zeilen wie Spalten aufweisen.

Bemerkungen. (Fortsetzung)

- Im Fall (für das Bilden beider Produkte) geeigneter Matrizen ist die Matrixmultiplikation nicht kommutativ (vertauschbar).

  Im Allgemeinen stimmen die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ nicht überein.

Gegeben seien eine $m \times n$-Matrix A und ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, d.h. der Vektor $\vec{x}$ besitze ebenso viele Einträge, wie A Spalten aufweist.
Wir erklären den Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ als das Produkt der Matrix A mit dem Vektor $\vec{x}$ durch

$$\vec{y} := A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$:= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m}$$

Um die Matrix-Vektor-Multiplikation im Kopf zu behalten, bietet sich auch hier die folgende Merkregel an:

Merkregel.

Interpretiert man die i-te Zeile der Matrix A als einen Vektor $\vec{v}_i$, so entspricht der Eintrag y_i des Produkt-Vektors $\vec{y}$ dem (euklidischen) Skalarprodukt

$$\vec{v}_i \bullet \vec{x}.$$

§9.3 Lineare Abbildungen

Definition 86.

Es sei A eine $m \times n$-Matrix. Bei der Abbildung

$$\vec{x} \mapsto \vec{y} := A \cdot \vec{x}$$

handelt es sich um eine Funktion (bzw. eine Abbildung), welche beliebigen Vektoren $\vec{x}$ des $\mathbb{R}^n$ einen entsprechenden Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ zuordnet.

Geben wir dieser Zuordnung den Namen f, so notieren wir kurz durch

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}.$$

Man sagt auch, die Matrix A induziert eine Abbildung f. Oft wird auch (etwas unsauber) die Matrix A selbst als die Abbildung bezeichnet.

Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ gibt es viele.

Die Abbildung, die von einer Matrix A induziert wird, besitzt jedoch eine wesentliche Eigenshaft, die sie aus der Masse heraushebt.

Sie ist linear.

Satz 60. (Linearität)

Es sei A eine $m \times n$-Matrix und

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

die zugehörige induzierte Abbildung. Dann ist f linear, d.h. für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ *bzw.* $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$,
- $f(c \cdot \vec{v}) = c \cdot f(\vec{v})$ *bzw.* $A \cdot (c \cdot \vec{v}) = c \cdot A\vec{v}$.

Satz 61. (Vielfache einer linearen Abbildung)

- *Es seien die linearen Abbildungen f und g gegeben durch*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad (\textit{mit einer } m \times n - \textit{Matrix } A), \\ g &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad g(\vec{x}) = B\vec{x} \qquad (\textit{mit einer } m \times n - \textit{Matrix } B). \end{aligned}$$

Dann ist für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$(f+g)(\vec{x}) = (A+B)\vec{x}, \qquad (c \cdot f)(\vec{x}) = (c \cdot A)\vec{x}.$$

Satz 61. (Fortsetzung)

- *Es seien die linearen Abbildungen f und g gegeben durch*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad & f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad (\text{mit einer } m \times n - \text{Matrix } A), \\ g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p, \quad & g(\vec{y}) = B\vec{y} \qquad (\text{mit einer } p \times m - \text{Matrix } B). \end{aligned}$$

Dann ist die Komposition $(g \circ f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ gegeben durch

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) = (BA)\vec{x}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.