Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya
Dr. Oliver Schirra

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2010

Blatt 12 Abgabe: keine

Aufgabe 12.1. (Analysis einer Veränderlichen und komplexe Zahlen)

a) Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \sin^2(2x)$. Bestimmen Sie alle Nullstellen, alle Punkte des Graphen mit waagerechter Tangente, alle lokalen Maxima und Minima sowie alle Wendepunkte. Bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangenten. Berechnen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 4 von g im Punkt $x_0 = \pi/4$.

b) Untersuchen Sie, ob folgende Reihen konvergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+8}{2n+7}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

c) Bestimmen Sie den Absolutbetrag: $\quad 4+3i, \quad (2+i)/(1+i), \quad 5+e^{\pi i}.$

Aufgabe 12.2. (Analysis mehrerer Veränderlicher)

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der durch

$$f(x,y) := (2x^2 - 3y^2)e^{-x^2-y^2} \quad (x, y \in \mathbb{R}^2)$$

gegebenen Funktion und entscheiden Sie, welche davon Maxima, Minima bzw. Sattelpunkte sind.

b) Beweisen Sie, dass das folgende Kurvenintegral unabhängig vom Weg zwischen Anfangspunkt und Endpunkt ist und berechnen Sie das Integral:

$$\int_{(-1,1)}^{(1,3)} (x+2)\,dx + (y+6)\,dy.$$

Aufgabe 12.3. (Lineare Algebra)

a) Überprüfen Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis dar.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcl} 5x_1 & + & ax_2 & = & 4 \\ ax_1 & + & 45x_2 & = & 12 \end{array}$$

c) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte, zwei linear unabhängige Eigenvektoren und den Winkel zwischen diesen Vektoren.

d) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12.4. (Gewöhnliche Differentialgleichungen)

a) Bestimmen Sie die reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' = 2y' - 2y$$

und finden Sie diejenige Lösung mit $y(\pi/2) = 1$ und $y'(\pi/2) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass $y = \sin(2x) + \cos(2x)/2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = -5\cos(2x)$$

ist, und geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{y'}{2x} - y^2 = 0, \quad y(1) = 1.$$

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

`http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/`