



Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II
Sommersemester 2010

Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 29.04.2010, bis 10:15 Uhr,
Briefkasten Nr. 8 im UG von Geb. E25

Versehen Sie Ihre Lösungen bitte gut lesbar mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Aufgabe 2.1 (3×3=9 Punkte)

Verifizieren Sie, dass folgende Vektorfelder als Gradient einer skalaren Funktion geschrieben werden können:

$$\text{a) } \vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ e^x z \\ e^x y \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz(2x + y + z) \\ xz(x + 2y + z) \\ xy(x + y + 2z) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.2. (2×3+3=9 Punkte)

a) Bestimmen Sie jeweils $\text{rot } \vec{f}$:

$$\text{i) } \vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x - y \\ y - z \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } \vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ z^2 + x^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

b) Sei $F(x, y, z) = (x - y)z$. Berechnen Sie $\text{grad } F$ und $\text{rot}(\text{grad } F)$.

Aufgabe 2.3. (6 Punkte)

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ erfüllt das Vektorfeld

$$\vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ay}{(x-y)^2} \\ \frac{2x}{(x-y)^2} + 1 \\ z \end{pmatrix}$$

die Integrabilitätsbedingungen? Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, auf dem \vec{f} konservativ ist, und bestimmen Sie auf diesem Bereich eine Stammfunktion von \vec{f} .

Aufgabe 2.4. (3×2=6 Punkte)

Es sei C der Graph der Funktion

$$y(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, 1]).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C x^2 dx + y^3 dy$$

- explizit mittels der Definition,
 - unter Bestimmung und Verwendung einer Stammfunktion $F(x, y)$ des totalen Differentials.
-

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/>