Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya
Dr. Oliver Schirra

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2010

Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 20.05.2010, bis 10:15 Uhr,
Briefkasten Nr. 8 im UG von Geb. E2 5

Versehen Sie Ihre Lösungen bitte gut lesbar mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Aufgabe 4.1 (2×4=8 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Winkel zwischen den Vektoren:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{d)} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.2. (2×4=8 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine Konstante $k \in \mathbb{R}$, so dass die beiden gegebenen Vektoren senkrecht aufeinander stehen:

$$\text{a)}\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ k+2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -3 \\ k \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{b)}\ \vec{g} = \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 2k+1 \end{pmatrix}, \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} 3k \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 2k+1 \\ k \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ k-3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{d)}\ \vec{x} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \\ -k \\ k+1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.3. (3×4=12 Punkte)

Geben Sie jeweils an, wie viele Vektoren maximal linear unabhängig sind, und stellen Sie im Fall der linearen Abhängigkeit einen Vektor als Linearkombination der übrigen Vektoren dar.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4.4. (3+1=4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und stellen Sie den Vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.

Aufgabe 4.5. (3×2=6 Punkte)

Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

b) Ist M ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 4.6. (4×3=12 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Mengen um lineare Vektorräume handelt. Falls ja, bestimmen Sie jeweils deren Dimension und geben Sie eine Basis an:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x + y = 2z \right\}, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t^2+1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} \; : \; t \in \mathbb{R} \right\},$$
$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x+3y-2z \\ 2x \\ x-z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4(y-z) \\ 7y-z \end{pmatrix} \; : \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 4.7. (2+3+3=8 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{d}$ in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene Span$\{\vec{a}, \vec{b}\}$ liegt. (Berechnen Sie dazu zwei Zahlen α_1 und α_2, so dass sich $\vec{d}$ als Linearkombination $\vec{d} = \alpha_1 \cdot \vec{a} + \alpha_2 \cdot \vec{b}$ darstellen lässt.)

c) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ stets in Span$\{\vec{a}, \vec{b}\}$ liegt.

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

`http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/`