Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya
Dr. Oliver Schirra

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2010

Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 27.05.2010, bis 10:15 Uhr,
Briefkasten Nr. 8 im UG von Geb. E2 5

Versehen Sie Ihre Lösungen bitte gut lesbar mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es sich bei den Unterräumen

$$U_1 := \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad U_2 := \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$ um den **gleichen** Unterraum handelt.

Aufgabe 5.2. (5 Punkte)

Unter welchen Bedingungen an $a \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 5.3. (2×4=8 Punkte)

Es seien

$$\vec{b}_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \frac{\sqrt{3}}{30}\begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \frac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_4 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten bezüglich dieser Basis von folgenden Vektoren:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.4. (3×3=9 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Paare von Matrizen X und Y an, die sich zu $X + Y$ addieren lasen, und berechnen Sie in diesen Fällen das Ergebnis.

b) Geben Sie die Paare von Matrizen X und Y an, für welche sich ein Matrizenprodukt XY oder YX bilden lässt, und berechnen Sie in diesen Fällen das Ergebnis.

c) Geben Sie die Matrizen X an, die sich zu $X^2 := XX$ quadrieren lassen, und berechnen Sie in diesen Fällen das Ergebnis.

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

`http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/`