Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Darya Apushkinskaya
Dr. Oliver Schirra

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II

Sommersemester 2010

Blatt 6 — Abgabe: Donnerstag, 10.06.2010, bis 10:15 Uhr, Briefkasten Nr. 8 im UG von Geb. E2 5

Versehen Sie Ihre Lösungen bitte gut lesbar mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Aufgabe 6.1 (4+4=8 Punkte)

Das Element Fantasium (Fa) mit relativer Atommasse 537 bildet die folgende trikline Kristallstruktur aus: Bezeichnen wir ein willkürlich gewähltes Fa-Atom als Ursprung, so wird die Elementarzelle durch die drei nächsten Nachbaratome in den Positionen

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

definiert. (Abstände in 10^{-10} m)

a) Welches Volumen hat die Elementarzelle?

b) Welches spezifische Gewicht hat das Fa-Kristall?

Aufgabe 6.2. (3+3=6 Punkte)

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Das Kreuzprodukt ist eine antisymmetrische Operation, d.h. es gilt

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}.$$

b) Sind die beiden Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear abhängig, so gilt für das Kreuzprodukt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}.$$

Aufgabe 6.3. (1×5=5 Punkte)

Berechnen Sie für die Matrizen $A = \dots$

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

den Bildvektor $\vec{y} = A\vec{x}$, also den Vektor $\vec{y}$, auf welchen der Vektor $\vec{x}$ durch die lineare Abbildung $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ abgebildet wird.

Aufgabe 6.4. (1+1+2=4 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\vec{y} = A\vec{x}$.

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis von a) den Vektor $\vec{z} = B \cdot \vec{y}$.

c) Geben Sie eine Matrix C an mit $\vec{z} = C\vec{x}$.

Aufgabe 6.5. (4 Punkte)

Die Abbildung $f\left(\vec{x}\right)=A\vec{x}$, $\left(\vec{x}\in\mathbb{R}^2\right)$ mit

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

dreht den Vektor $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ um den Winkel φ. Der gedrehte Vektor werde mit $\vec{y}$ bezeichnet. Verifizieren Sie, dass die Abbildung

$$g\left(\vec{y}\right)=B\vec{y},\quad \left(\vec{y}\in\mathbb{R}^2\right)$$

mit

$$B=\begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta\\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}$$

diesen Vorgang rückgängig macht, also den Vektor $\vec{y}$ nach $\vec{x}$ zurückdreht.

Aufgabe 6.6. (9× 1=9 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$a)\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix},\quad b)\ \begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix},\quad c)\ \begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{vmatrix},\quad d)\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix},\quad e)\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 3\end{vmatrix},$$

$$f)\ \begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix},\quad g)\ \begin{vmatrix}x & e^x\\ e^{-x} & x\end{vmatrix},\ (x\in\mathbb{R}),\quad h)\ \begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}\ (\alpha\in\mathbb{R}),$$

$$i)\ \begin{vmatrix}(a+b) & (a^2-b^2)\\ 1 & a-b\end{vmatrix}\ (a,b\in\mathbb{R}).$$

Aufgabe 6.7. (2×3=6 Punkte)

Für zwei $n \times n$-Matrizen A und B gilt die Formel

$$\det\,(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

i) Beweisen Sie diese Formel im Fall $n = 2$.

ii) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass eine entsprechende Formel für die Addition im Allgemeinen falsch ist, d.h. in der Regel gilt

$$\det\,(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

`http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/`