



Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II  
Sommersemester 2010

**Blatt 8**

Abgabe: Donnerstag, 24.06.2010, bis 10:15 Uhr,  
Briefkasten Nr. 8 im UG von Geb. E25

---

Versenden Sie Ihre Lösungen bitte gut lesbar mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

---

**Aufgabe 8.1 (3+2=5 Punkte)**

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie zur Kontrolle, dass für je einen Eigenvektor  $\vec{x}$  und den zugehörigen Eigenwert  $\lambda$  tatsächlich die Gleichung  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  erfüllt ist.

---

**Aufgabe 8.2. (3×4=12 Punkte)**

Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zu folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

**Aufgabe 8.3. (5 Punkte)**

Diagonalisieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

---

#### Aufgabe 8.4. (4×3=12 Punkte)

Formulieren Sie für jeden der folgenden zeitabhängigen Abläufe eine Differentialgleichung, welche den Vorgang beschreibt:

- a) *Radioaktiver Zerfall*: Die Geschwindigkeit, mit der die Anzahl  $n(t)$  gewisser Teilchen abnimmt, ist proportional zur Anzahl  $n(t)$ .
- b) *Wachstum mit Überbevölkerungshemmung*: Die Anzahl  $n(t)$  einer Individuenart wächst einerseits mit einer Geschwindigkeit proportional zur Anzahl  $n(t)$  mit einem Wachstums-  
Proportionalitätsfaktor  $\alpha > 0$ , nimmt jedoch gleichzeitig proportional zum Quadrat  
der Anzahl  $n(t)$  mit einem Hemmungs-Proportionalitätsfaktor  $\beta > 0$  ab.
- c) *Chemische Reaktion erster Ordnung*: Von einem Ausgangsstoff ist anfangs ( $t = 0$ ) die  
Konzentration  $A$  vorhanden. Im Lauf der Zeit wird der Stoff umgesetzt, wobei  $x(t)$  die  
Konzentration des bereits umgesetzten Stoffes zum Zeitpunkt  $t$  bezeichne, also  $x(0) =$   
 $0$ . Die Geschwindigkeit, mit der die Konzentration des bereits umgesetzten Stoffes  $x(t)$   
wächst, ist proportional zur noch vorhandenen Konzentration des Ausgangsstoffes.
- d) *Virusausbreitung*: Von insgesamt  $N$  Individuen einer Art ist zum Zeitpunkt  $t$  eine  
Anzahl  $n(t)$  mit einem Virus infiziert. Es werde vereinfachend angenommen, dass kein  
Individuum neu geboren wird oder stirbt. Die Geschwindigkeit, mit der die Anzahl  
infizierter Individuen zunimmt, ist proportional zur Anzahl Infizierter zum Zeitpunkt  
 $t$  und auch proportional zur Anzahl Nichtinfizierter zum Zeitpunkt  $t$ .

---

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/>