**Universität des Saarlandes**
**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
Prof. Dr. M. Fuchs
Dr. Christian Tietz

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

**Minimalflächen (WiSe 2016/17)**
**Blatt 3**

---

## Aufgabe 1

Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$X(u,v) := \frac{1}{1+u^2+v^2}(2u, 2v, u^2+v^2-1).$$

(a) Zeigen Sie, dass $X$ ein parametrisiertes Flächenstück ist.

(b) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung $N$ von $X$.

## Aufgabe 2

Zeigen Sie die Parameterinvarianz des Flächeninhalts: Sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung von $S := F(\Omega)$, $\varphi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus und $\widetilde{F} := F \circ \varphi$. Dann ist

$$\int_\Omega |\partial_1 F \times \partial_2 F| du dv = \int_{\widetilde{\Omega}} |\partial_1 \widetilde{F} \times \partial_2 \widetilde{F}| du dv.$$

## Aufgabe 3

Berechnen Sie die zweite Fundamentalform für Graphenflächen $G_f$. Das heißt es sei $G_f := F(\Omega)$ mit $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und $F(u,v) = (u, v, f(u,v))$. Für $p \in S$ und $\xi, \eta \in T_p(S)$ ist

$$\mathrm{II}_p(\xi,\eta) := -d\mathcal{N}_p(\xi)\cdot\eta \quad \text{mit } \mathcal{N}(p) := N(F^{-1}(p)).$$

(a) Zeigen Sie dazu zunächst, dass mit $\xi = \langle DF(u_0,v_0), z\rangle$ und $\eta = \langle DF(u_0,v_0), w\rangle$ für $z, w \in \mathbb{R}^2$ die folgende Beziehung gilt

$$\mathrm{II}_p(\xi,\eta) = z^T[-DN(u_0,v_0)^T DF(u_0,v_0)]w,$$

wobei $p = F(u_0, v_0)$.

(b) Folgern Sie schließlich

$$\mathrm{II}_p(\xi,\eta) = \frac{D^2 f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(u_0,v_0)(z,w).$$

**Abgabe:** keine.