Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. M. Fuchs
Dominik Schillo, M.Sc.

Minimalflächen (WiSe 2016/17)
Blatt 5

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass sich die mittlere Krümmung H einer konform parametrisierten Fläche $S := F(\Omega)$ mit einer C^2-Funktion F durch

$$H = \frac{N \cdot F_{uu} + N \cdot F_{vv}}{2|F_u|^2}$$

berechnen lässt. Beweisen Sie dazu zunächst, dass die Eigenwerte von $d\mathcal{N}_p : T_pS \to T_pS$ (siehe Blatt 3, Aufgabe 3) auch Eigenwerte von

$$\Lambda := (DF^T DF)^{-1} DN^T DF$$

sind.

Aufgabe 2

Seien $F, G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ konforme Parametrisierungen von Minimalflächen $F(\Omega)$ und $G(\Omega)$ mit einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Falls $F + iG$ eine holomorphe Funktion ist, nennt man F und G konjugierte Minimalflächen.

(a) Zeigen Sie, dass Helikoid und Katenoid parametrisiert durch

$$F(u,v) := (a\cosh(v)\cos(u), a\cosh(v)\sin(u), av) \quad \text{und}$$
$$G(u,v) := (-a\sinh(v)\sin(u), a\sinh(v)\cos(u), au)$$

mit $a > 0$ konjugierte Minimalfächen sind.

(b) Seien zwei konjugierte Minimalflächen $F(\Omega)$ und $G(\Omega)$ gegeben. Beweisen Sie, dass

$$H := \cos(t)F + \sin(t)G$$

für $t \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine parametrisierte Minimalfläche ist.

Abgabe: Keine.